משוואות דיפרנציאליות ליניאריות מסדר ראשון

גיא רוטנברג - http://www.sikumuna.co.il

אוגוסט 2006

1 הגדרות והפתרון הכללי

משוואה דיפרנציאלית לינארית מסדר ראשון היא משוואה מהצורה של

$$y' + a(x)y = b(x) \tag{1}$$

כאשר $a(x), b(x)$ פונקציות של x. אם המקדם של y' אינו אחד (והוא אינו אפס כי אחרת אין זו משוואה דיפרנציאלית) אז נחלק בו את המשוואה כך שהמקדם של y' יהיה אחד.

על מנת להמשיך בדיון אודות הפתרון של סוג זה של משוואות נדרוש ש־$a(x)$ ו־ $b(x)$ יהיו רציפות בקטע כלשהו $(\; ; \;)$ משותף.

כעת נעבור לדרך הפתרון של המשוואה. לפי ההנחה $a(x)$ רציפה ולכן בוודאי אינטגרבילית וקיימת לה פונקציה קדומה כלשהי שנסמנה ב־ $A(x)$. כלומר $A(x) = \int^x a(t)dt$.[1] $e^{A(x)}$ שונה מאפס עבור כל x ולכן נכפול בו את שני צדדי המשוואה (1) ונקבל

$$e^{A(x)}y' + e^{A(x)}a(x)y = e^{A(x)}b(x) \tag{2}$$

אם נשים לב נבחין בכך שאגף שמאל הוא נגזרת של מכפלה כלומר ניתן לכתוב את המשוואה (2) כך

$$\left(e^{A(x)}y\right)' = e^{A(x)}b(x) \tag{3}$$

ובעזרת אינטגרציה על שני הצדדים נקבל

$$e^{A(x)}y = \int^x e^{A(t)}b(t)dt + C \tag{4}$$

במשוואה (4) באה לידי ביטוי הנחנתנו ש־ $b(x)$ רציפה כי אחרת לא נוכל להבטיח את קיומה של פונקציה קדומה ל־ $e^{A(x)}b(x)$. כעת כל שנותר לנו עלשות הוא לבודד את y מהמשוואה (4) ונקבל את הפתרון הכללי המשוואה (1)

$$y = e^{-A(x)} \int^x e^{A(t)}b(t)dt + C$$

כמו כן תחת דרישתנו ניתן להוכיח כי בהניתן תנאי $y(x_o) = y_o$ כאשר $x_o \in (\; ; \;)$ אז הפתרון הוא יחיד.

[1] הסימון $\int^x f(t)dt$ מסמל פונקציה קדומה כלשהי של $f(x)$ בעוד ש־ $\int^x f(t)dt + C$ מסמן את אוסף הפונקציות הקדומות של $f(x)$.

2 דוגמאות

דוגמא 1 פתור את המשוואה $y' = 6y$.
נעביר אגף ונעקוב אחרי ההוראות לפתרון בחלק 1.

$$\begin{aligned}
y' - 6y &= 0\\
e^{-6x}y' - 6e^{-6x}y &= 0\\
\left(e^{-6x}y\right)' &= 0\\
e^{-6x}y &= C\\
y &= Ce^{-6x}
\end{aligned}$$

דוגמא 2 פתור את המשוואה $6xy' + 12x^2y = 18x^2$.
כאן כל מה שנותר לנו לעשות הוא לחלק ב־ $6x$ ולהמשיך כרגיל.

$$\begin{aligned}
y' + 2xy &= 3x\\
e^{x^2}y' + 2xe^{x^2}y &= 3xe^{x^2}\\
\left(e^{x^2}y\right)' &= 3xe^{x^2}\\
e^{x^2}y &= \int^x 3te^{t^2}dt + C\\
e^{x^2}y &= 1.5e^{x^2} + C\\
y &= 1.5 + Ce^{-x^2}
\end{aligned}$$

דוגמא 3 מצא פונקציה y המקיימת את התנאי ששיפוע הגרף שלה בכל נקודה שווה למכפלת שיעורי הנקודה וכמו כן שתעבור בנקודה $(2; 4e^2)$.
את נתוני הבעיה נוכל לתרגם לבעיית ההתחלה

$$\begin{cases} y' = xy\\ y(2) = 4e^2 \end{cases}$$

נמצא את הפתרון הכללי של המשוואה.

$$\begin{aligned}
y' - xy &= 0\\
e^{\frac{-x^2}{2}}y' - xe^{\frac{-x^2}{2}}y &= 0\\
\left(e^{\frac{-x^2}{2}}y\right)' &= 0\\
e^{\frac{-x^2}{2}}y &= C\\
y &= Ce^{\frac{x^2}{2}}
\end{aligned}$$

כעת שמקבלנו את הפתרון הכללי נציב בו את תנאי ההתחלה על מנת לקבל את הפתרון הפרטי.

$$\begin{aligned}
y(2) &= 4e^2 \\
4e^2 &= Ce^2 \\
C &= 4
\end{aligned}$$

נציב את הקבוע שקיבלנו בפתרון הכללי ונקבל את הפתרון הפרטי המבוקש, כלומר

$$y = 4e^{\frac{x^2}{2}}$$

דוגמא 4 פתור את המשוואה הבאה: $y' - \cos xy = \cos x$

גם זאת משוואה דיפרנציאלית לינארית מסדר ראשון ולכן נוכל לפתור אותה בדיוק באותה דרך כמו את המשוואה הקודמות.

$$\begin{aligned}
y' - \cos xy &= \cos x \\
e^{\sin x}y' - \cos xe^{\sin x}y &= e^{\sin x}\cos x \\
\left(e^{\sin x}y\right)' &= e^{\sin x}\cos x \\
e^{\sin x}y &= \int^x e^{\sin x}\cos xdx + C \\
e^{\sin x}y &= e^{\sin x} + C \\
y &= 1 + Ce^{-\sin x}
\end{aligned}$$