חדו"א 1

סיכום ההרצאות של מר מרדכי אפשטיין

עורך: אודי רובינשטיין
http://www.cs.tau.ac.il/~ehudrubi

עודכן בתאריך: 30/08/2004

רווחים

רווח פתוח (a, b)

רווח סגור [a, b]

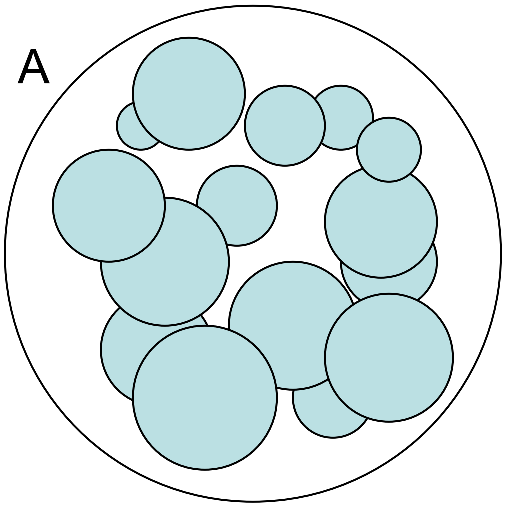
רווח חצי פתוח חצי סגור [a, b)

רווח חצי סגור חצי פתוח (a, b]

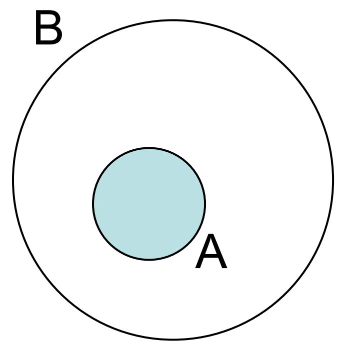
קבוצות

$$\varphi(A)$$

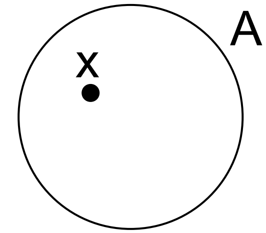
קבוצת החזקה



$$A \subseteq B$$

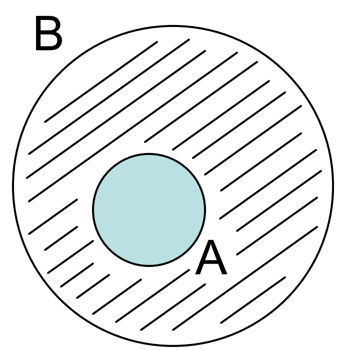


$$x \in A$$



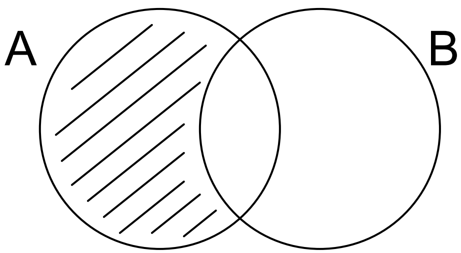
$$A^c$$

המשלים של A

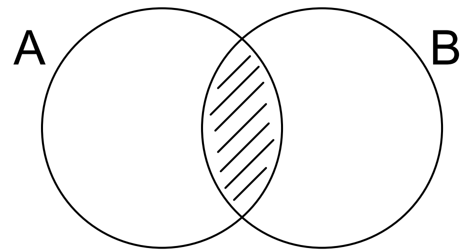


יחסים בין קבוצות

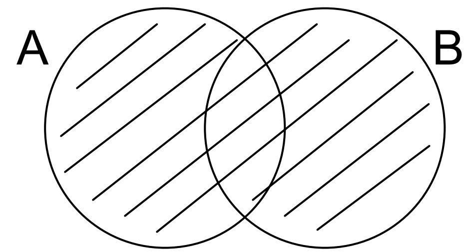
$A - B$



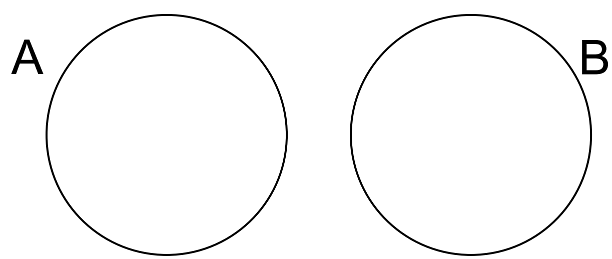
$A \cap B$



$A \cup B$

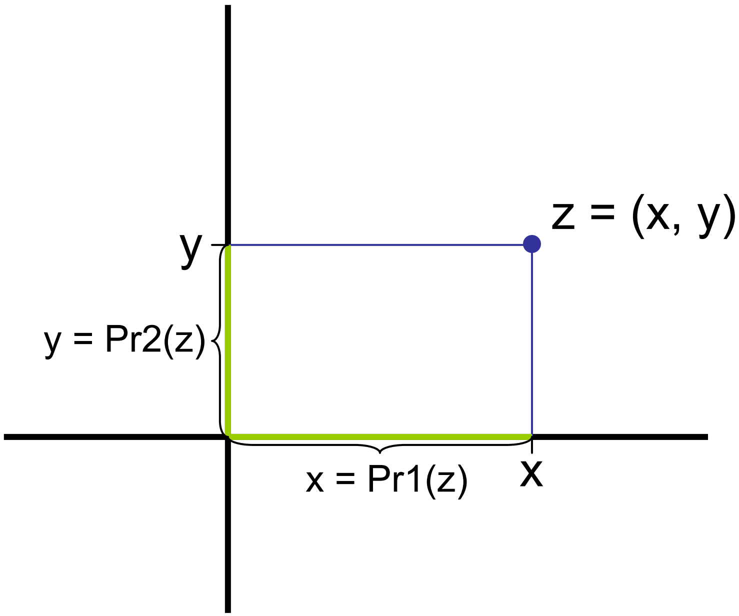


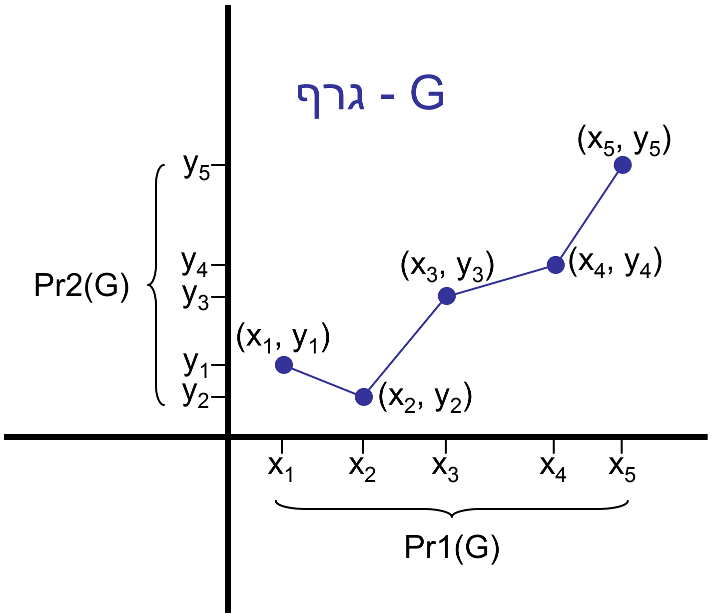
A ו- B זרות



זוגות סדורים

$$(X, Y) = \{ \{x\}, \{x, y\} \}$$





$$(x, y) \neq (y, x)$$

מכפלה קרטזית

$$A = \{a_1, a_2, a_3\}$$

$$B = \{b_1, b_2, b_3\}$$

$$A \times B = \left\{ \begin{array}{lll} (a_1, b_1), & (a_1, b_2), & (a_1, b_3), \\ (a_2, b_1), & (a_2, b_3), & (a_2, b_3), \\ (a_3, b_1), & (a_3, b_2), & (a_3, b_3) \end{array} \right\}$$

$$A \times B \neq B \times A$$

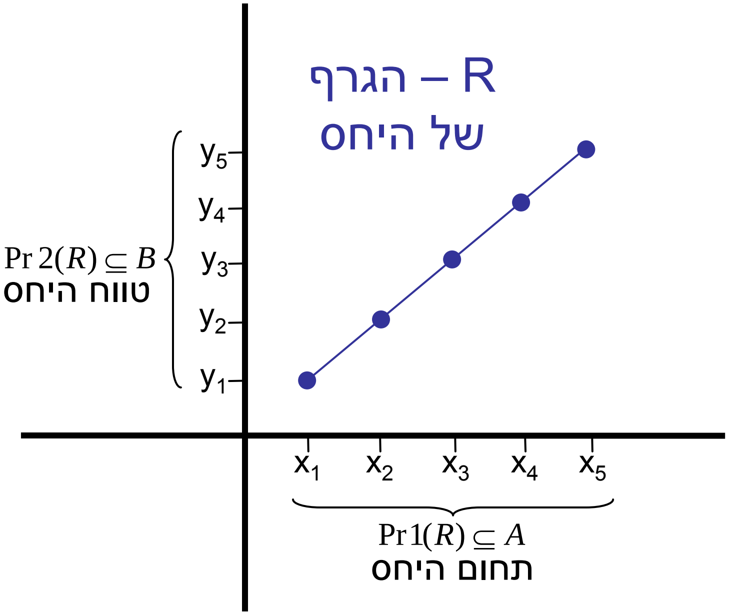
$$A \times A = A^2 \qquad A \times \ldots \times A = A^n$$

$$\Pr 1(A \times B) = A \qquad \Pr 2(A \times B) = B$$

יחסים

(A, B, R) – יחס בינארי

$$xRy = (x, y) \in R$$



(A, B, R) = (A', B', R')

A = A'

B = B'

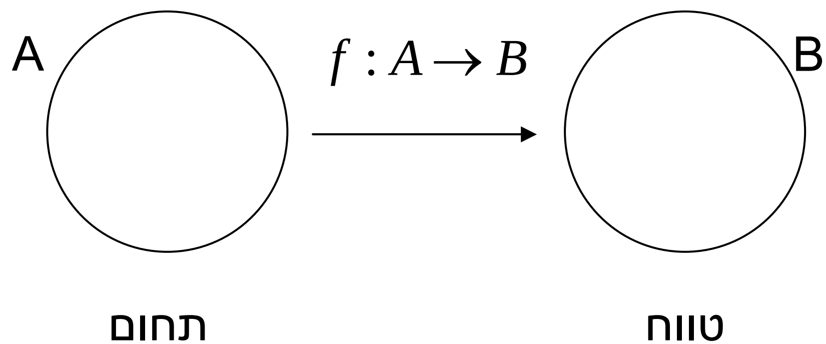
R = R'

(A, A, R) – יחס הומוגני

(A, B, AxB)- יחס אונברסלי

R^{-1} – יחס הפוך

פונקציות



<u>אקסיומת הסדר</u>

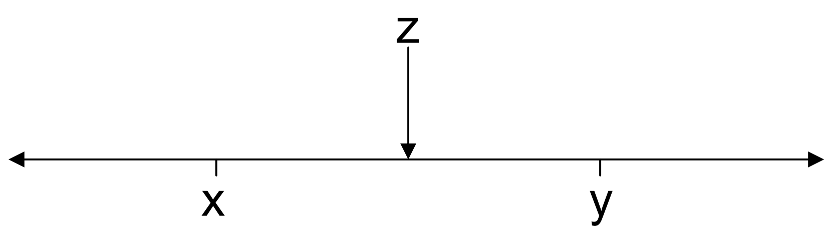
$\leq$ - יחס סדר טוטאלי על R

$$x \leq y$$
$$\Downarrow$$
$$x + z \leq y + z$$

$$x \leq y \wedge z \geq 0$$
$$\Downarrow$$
$$xz \leq yz$$

שדה עם יחס סדר טוטאלי המקיים שתי תכונות אלו נקרא שדה סדור

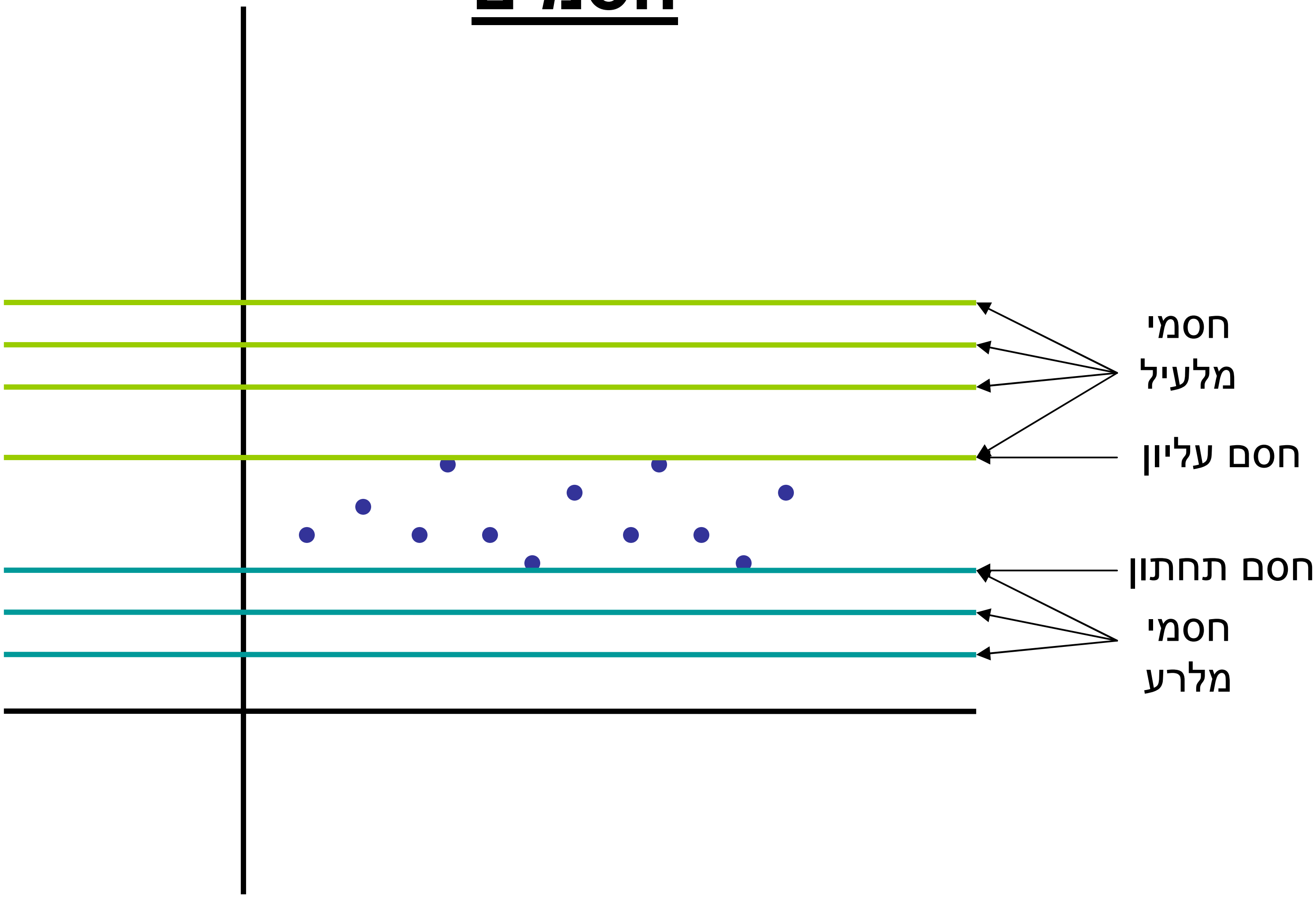
קבוצה צפופה



בין כל שני איברים של קבוצה צפופה יש איבר נוסף השייך לקבוצה

R היא קבוצה צפופה

חסמים



$$\sup A \geq x \in A$$

$$\inf A \leq x \in A$$

supA – חסם עליון של A

infA – חסם תחתון של A

קבוצה החסומה גם מלעיל וגם מלרע תקרא קבוצה חסומה

אקסיומת השלמות

אם $A \subset R$ לא ריקה וחסומה מלעיל, אז יש לה חסם עליון.

מסקנה מאקסיומת השלמות:

אם $A \subset R$ לא ריקה וחסומה מלרע, אז יש לה חסם תחתון.

משפט Dedekind

בהינתן:

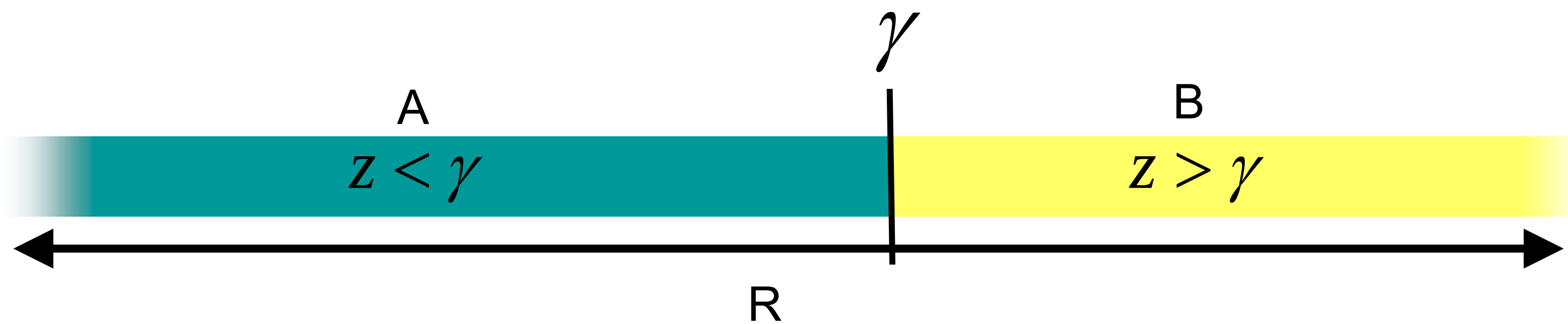
$$A, B \subset R$$

$$A \neq \phi, B \neq \phi$$

$$A \cup B = R$$

$$x \in A, y \in B \Rightarrow x < y$$

קיים γ יחיד כך ש:



*משפט זה שקול לאקסיומת השלמות

ארכימידיאניות

R הוא שדה סדור ארכימידיאני, כלומר:

אם $x, y \in R$ כך ש- x>0, אזי קיים מספר טבעי n כך ש- nx>y.

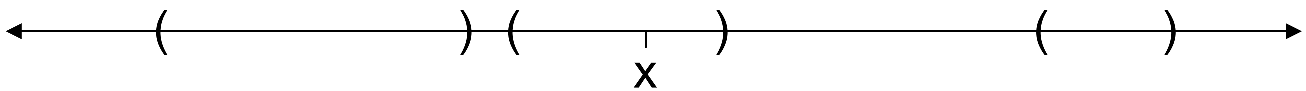
החלק השלם

$$[x] \le x \le [x]+1$$

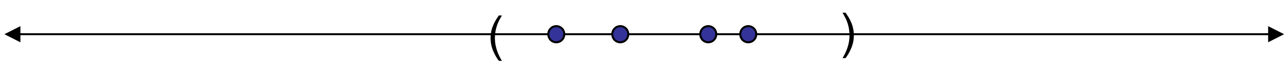
[x] – שלם

סביבה

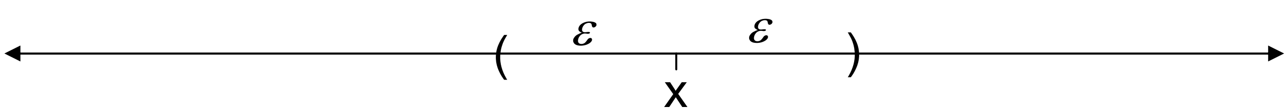
כל קבוצה V המכילה רווח פתוח המכיל את x תקרא סביבה של x.



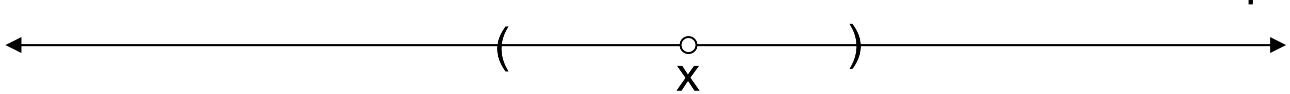
רווח פתוח הוא סביבה של כל אחת מנקודותיו



סביבה סימטרית של x



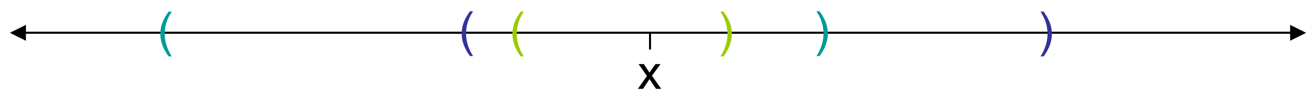
סביבה מנוקבת של x



מרחב טופולוגי

$x \in R$

V(x) קבוצת כל הסביבות של x

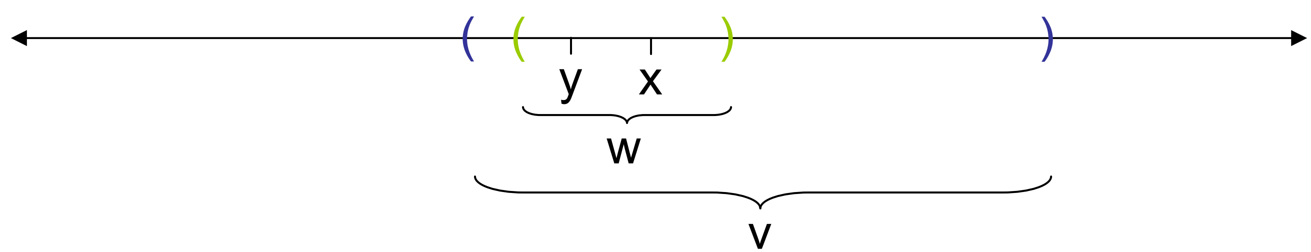


$$v \in V(x) \Rightarrow x \in v$$

$$v \in V(x), v \subset w \Rightarrow w \in V(x)$$

$$v_1, v_2 \in V(x) \Rightarrow v_1 \cap v_2 \in V(x)$$

$$v \in V(x) \Rightarrow \exists w \in V(x) \rightarrow \forall y \in w \exists v \in V(y)$$

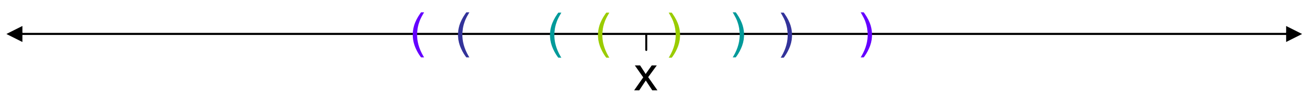


אם עבור כל x ב X נבחרה קבוצה V(X) של סביבות של X שמקיימות את התכונות הנ"ל, אז נאמר שהוגדר על X מבנה טופולוגי.

קבוצה כזו המצוידת בטופולוגיה נקראת מרחב טופולוגי ולאיבריו קוראים נקודות.

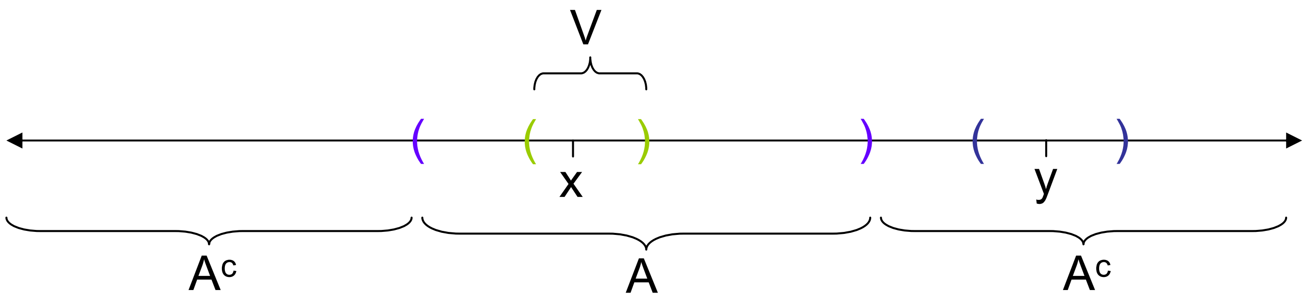
מערכת פונדמנטלית של סביבות

קבוצת סביבות של נקודה x נקראת מערכת פונדמנטלית של סביבות של x, אם כל סביבה של x מכילה סביבה מהמערכת.



נקודה פנימית

נקודה x נקראת נקודה פנימית ל-A אם קיימת סביבה V של x, כך ש- $V \subset A$



אוסף כל הנקודות הפנימיות של A נקרא הפנים של A ויסומן ב-A^0.
ברור כי $A^0 \subset A$

נקודה y נקראת נקודה חיצונית לקבוצה A אם היא פנימית ל A^c.
לקבוצה $(A^c)^0$ קוראים החוץ של A.

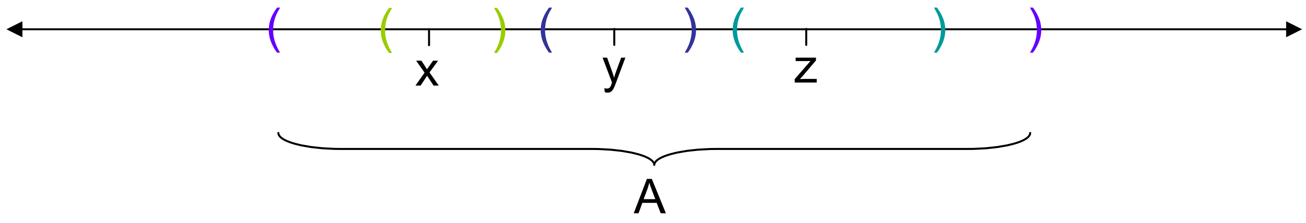
כל נקודה השייכת לרווח פתוח נקודה פנימית לרווח זה.

$$A \subset B \Rightarrow A^0 \subset B^0$$

$$(A \cap B)^0 = A^0 \cap B^0$$

קבוצה פתוחה

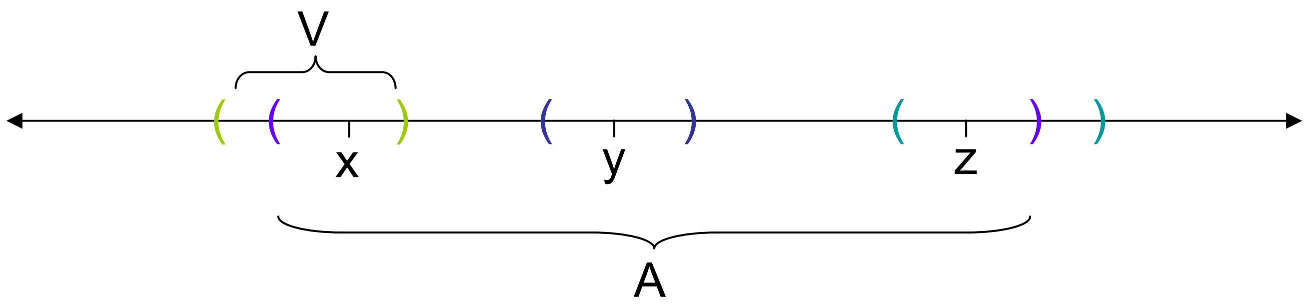
קבוצה $A \subset R$ נקראת פתוחה אם $A=A^0$, כלומר, אם כל הנקודות של A הן פנימיות לקבוצה זו.



האיחוד של משפחה כלשהי של קבוצות פתוחות היא קבוצה פתוחה.
החיתוך של מספר סופי של קבוצות פתוחות היא קבוצה פתוחה.

נקודת סגור

נקודה x של A נקראת נקודת סגור של A אם עבור כל סביבה של x מתקיים: $V \cap A \neq \phi$



אוסף כל נקודות הסגור של קבוצה A נקרא הסגור של A ויסומן $\overline{A}$

כל נקודה של A היא נקודת סגור שלה ולכן $A \subset \overline{A}$

קבוצה סגורה

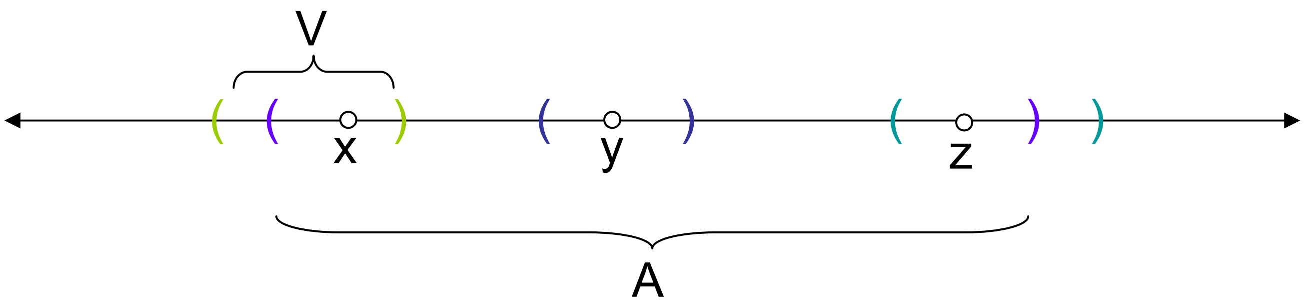
קבוצה A נקראת קבוצה סגורה אם $A = \overline{A}$

קבוצה A היא סגורה אם ורק אם A^c היא פתוחה

החיתוך של משפחה כלשהי של קבוצות סגורות הוא קבוצה סגורה.
האיחוד של מספר סופי של קבוצות סגורות הוא קבוצה סגורה.

נקודת הצטברות

נקודה x תקרא נקודת הצטברות של A, אם כל סביבה מנוקבת של x מכילה איבר מ-A.



קבוצת כל נקודות ההצטברות של A נקראת הקבוצה הנגזרת של A ותסומן ב-A’

אם A סופית אז $A' = \phi$

אם x היא נקודת הצטברות אז היא גם נקודת סגור, ההיפך אינו נכון.

קבוצה $A \subset R$ סגורה אם ורק אם $A' \subset A$

X היא נקודת הצטברות של A אם ורק אם לכל סביבה V של x הקבוצה $V \cap A$ היא אינסופית.

אם לקבוצה A נקודת הצטברות אז היא אינסופית, ההיפך אינו נכון.

נקודה מבודדת

נקודה x שאינה נקודת הצטברות נקראת נקודה מבודדת.

x היא נקודה מבודדת ב-A אם ורק אם קיימת סביבה V של x כך ש $V \cap A = \{x\}$

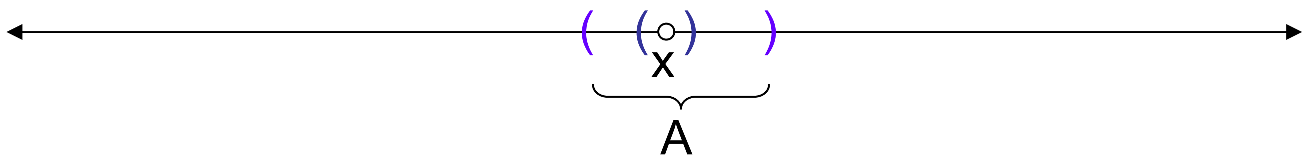
קבוצה שכל נקודותיה מבודדות נקראת קבוצה דיסקרטית.

הקבוצות N ו-Z הן קבוצות דיסקרטיות.

כל נקודת סגור של A היא נקודת הצטברות או נקודה מבודדת, ולכן: $\overline{A} = A \cup A'$

משפט Bolzano-Weierstrass

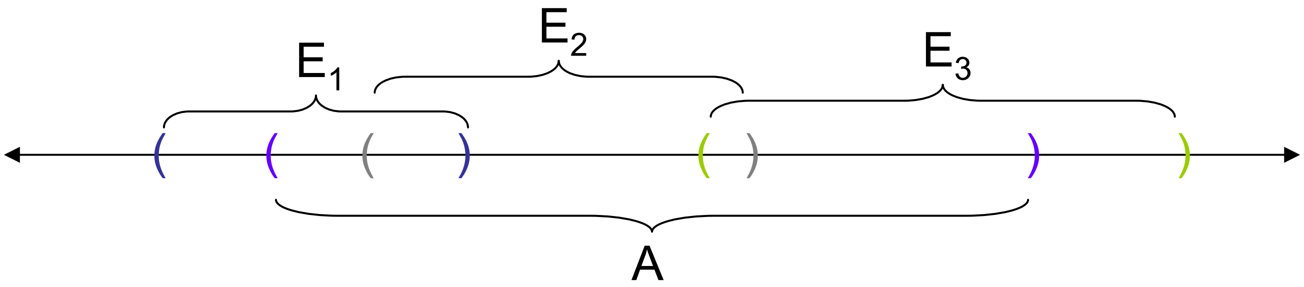
אם $A \subset R$ היא קבוצה אינסופית וחסומה, אזי יש לה לפחות נקודת הצטברות אחת (סופית או לא).



כיסוי

תהי $A \subset R$. על משפחה $F = (E_i)_{i \in I}$ של תת קבוצות של R אומרים שהיא כיסוי של A אם:

$$A \subset \bigcup_{i \in I} E_i$$



אם כל איבר של F הוא קבוצה פתוחה נאמר ש F הוא כיסוי פתוח.

יהי F כיסוי של A. תת משפחה של F שגם היא מכסה את A נקראת תת כיסוי של F.

אם המשפחה F היא כיסוי ל-A, ול-F מספר סופי של איברים, אומרים ש-F היא כיסוי סופי.

קבוצה קומפקטית

קבוצה $A \subset R$ נקראת קומפקטית אם כל כיסוי פתוח F של A מכיל תת כיסוי סופי, כלומר, קיימת משפחה סופית $(E_i,\ldots,E_k)$ חלקית ל-F, כך ש:

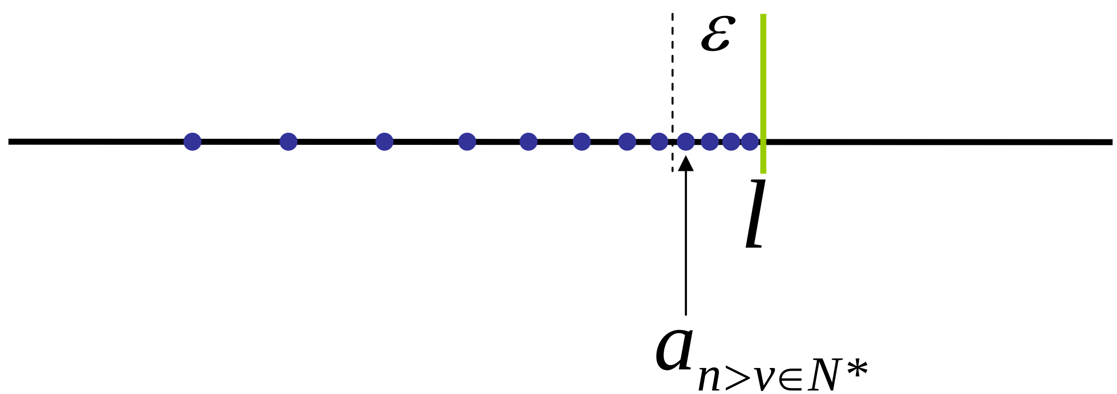
$$A \subset \bigcup_{i=1}^{k} E_i$$

משפט Borel-Lebesgue – קבוצה $A \subset R$ היא קומפקטית אם ורק אם היא סגורה וחסומה.

מושג הגבול

תהי a_n סדרה ממשית, L יהיה גבול של a_n אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $v \in N^*$ כך שאם $n \geq v$
אזי :

$$|a_n - l| < \varepsilon$$



אם L הוא גבול של a_n, אז אומרים ש- a_n מתכנסת ל-L.
אם ל a_n אין גבול אז אומרים שזו סדרה מתבדרת.

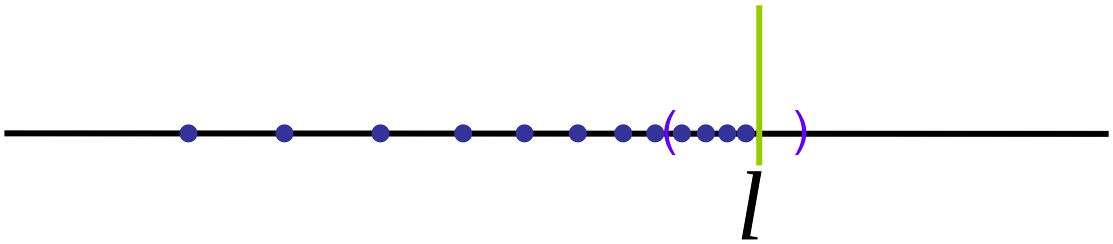
$$l = \lim a_n$$

$$a_n \to l$$

אם a_n מתכנסת אז היא חסומה.
אם היא לא חסומה אז היא מתבדרת.

מושג הגבול (המשך)

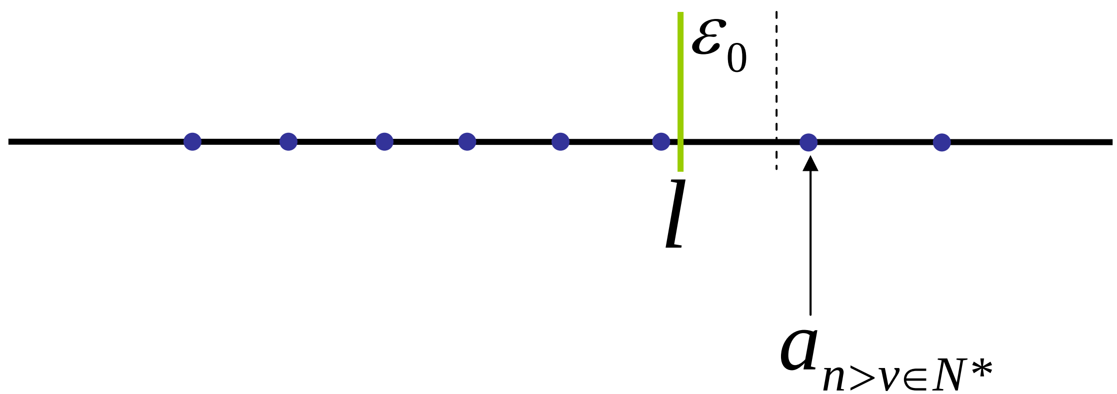
L יהיה גבול של הסדרה אם כל סביבה שלו מכילה את כל אברי הסדרה פרט למספר סופי של איברים.



סדרה מתבדרת

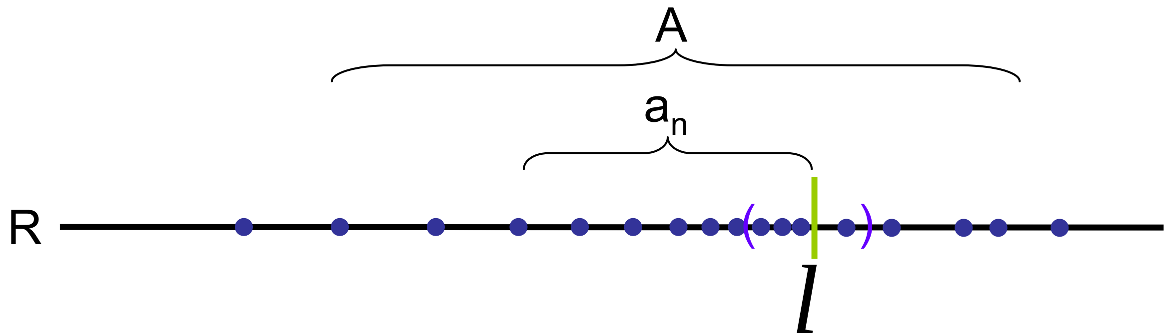
a_n סדרה ממשית, אם ורק אם לכל $l \in R$ קיים $\varepsilon_0 > 0$ כך שלכל $v \in N^*$ קיים $n > v$ עבורו:

$$| a_n - l | \geq \varepsilon_0$$



מושג הגבול (המשך)

תהי $A \subset R$, המספר L הוא נקודת סגור של A, אם ורק אם, קיימת סדרה a_n שאיבריה ב A, המתכנסת ל-L.



אם כל איברי a_n שונים מ L אז L הוא נקודת הצטברות של A.

אם $\lim a_n \in A$ לכל a_n שמתכנסת, אז A קבוצה סגורה.

מערכת המספרים הממשיים המורחבים

$$\overline{R} = R \cup \{-\infty, +\infty\}$$

לכל תת קבוצה לא ריקה של $\overline{R}$ (ובפרט של R) קיים ב $\overline{R}$ חסם עליון וחסם תחתון.

$$x + \infty = +\infty$$

$$x + (-\infty) = -\infty$$

$x > 0$

$$x \cdot \infty = \infty$$

$$x \cdot (-\infty) = -\infty$$

$x < 0$

$$x \cdot \infty = -\infty$$

$$x \cdot (-\infty) = +\infty$$

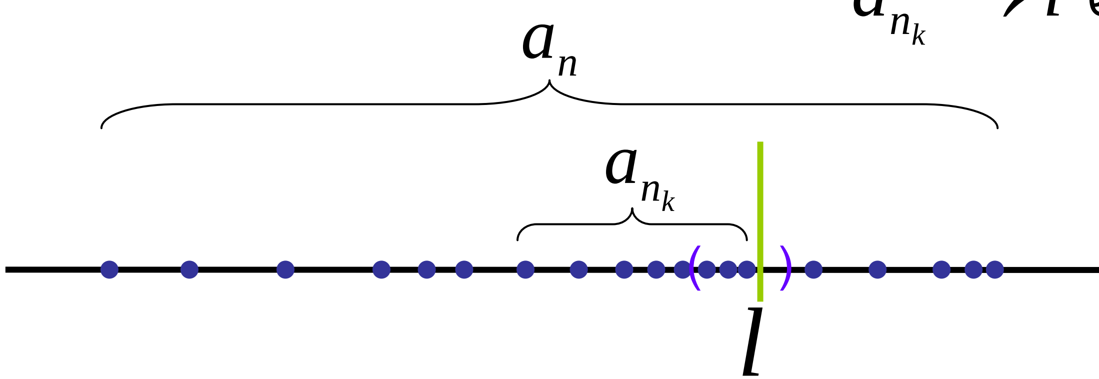
סדרות מונוטוניות – משפט Weierstrass

תהי a_n סדרה ממשית מונוטונית, אזי יש לה גבול ב- $\overline{R}$ והוא: החסם העליון שלה אם הסדרה עולה והחסם התחתון שלה אם הסדרה יורדת.

סדרה מונוטונית מתכנסת אם ורק אם היא חסומה

גבול עליון וגבול תחתון של סידרה

תהי a_n סדרה ממשית. מספר $l \in \overline{R}$ נקרא נקודת גבול או גבול חלקי של הסדרה אם קיימת תת סדרה a_{n_k} כך ש $a_{n_k} \to l$



מספר $l \in \overline{R}$ הוא נקודת גבול של הסדרה a_n אם ורק אם כל סביבה שלו מכילה אינסוף איברים של הסדרה.

הלמה של Cesaro – כל סדרה ממשית חסומה מכילה תת סדרה מתכנסת.

אם a_n היא סדרה לא חסומה מלעיל (מלרע), אזי קיימת תת סדרה שגבולה $+\infty$ $(-\infty)$.

לכל סדרה ממשית קיים גבול חלקי ב $\overline{R}$.

אם לסדרה a_n קיים גבול חלקי l יחיד (סופי או לא), אז ל a_n יש גבול והוא l.

לכל סדרה ממשית יש נקודת גבול ב $\overline{R}$ הגדולה ביותר הנקראת הגבול העליון של הסדרה והמסומנת ב- $\limsup a_n$. וכמו כן יש לה נקודת גבול ב $\overline{R}$ הקטנה ביותר הנקראת הגבול התחתון של הסדרה והמסומנת ב-$\liminf a_n$.

גבול עליון וגבול תחתון של סידרה

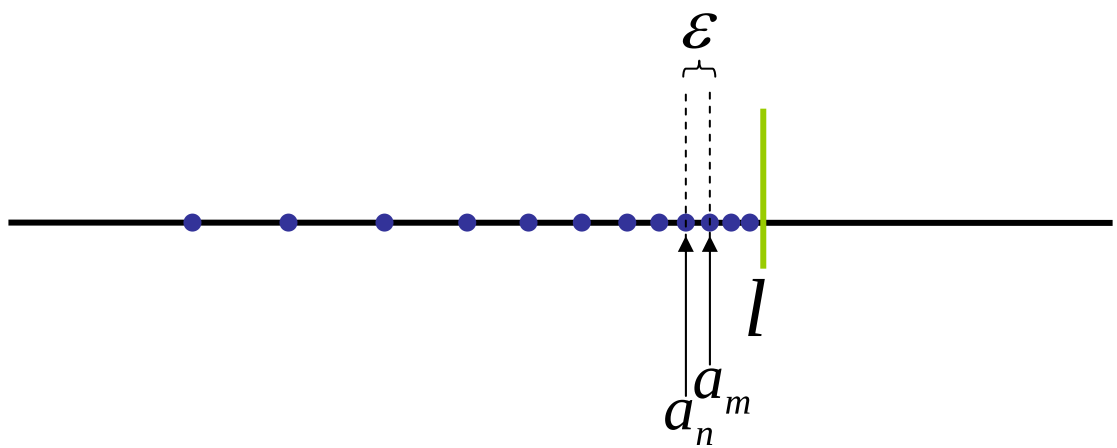
לסדרה a_n יש גבול אם ורק אם קיים: $\liminf a_n = \limsup a_n$.
ובמקרה זה הערך המשותף של הגבול העליון והתחתון הוא גבול הסדרה.

קבוצה $A \subset R$ היא קומפקטית אם ורק אם לכל סדרה ב-A יש נקודת גבול השייכת ל-A.
או במילים אחרות, כל סדרה ב-A מכילה תת סדרה המתכנסת לנקודה ב-A.

הקריטריון של Cauchy

תהי a_n סדרה ממשית. נאמר ש a_n היא סדרת Cauchy (או סדרה פונדמנטלית) אם לכל $\varepsilon > 0$
קיים $\nu \in N^*$ כך שאם $n \geq \nu$ ו- $m \geq \nu$ אזי:

$$| a_m - a_n | < \varepsilon$$



כל סדרת Cauchy היא חסומה.

סדרה ממשית מתכנסת אם ורק אם היא סדרת Cauchy.

אקספוננציאלים ולוגריתמים

יהי a>0 ו- $x \in R$ כלשהו. תהי r_n סדרת רציונלים המתכנסת ל-x. נגדיר את החזקות a^x ע"י:

$$a^x = \lim a^{r_n}$$

אם עבור $x \in R$ נתון r_n ו- r'_n הן שתי סדרות של רציונלים המתכנסות כל אחת ל-x, אזי קיים:

$$a^{r'_n} = a^{r'_n - r_n} \cdot a^{r_n}$$

והיות ו-$r'_n - r_n$ היא סדרת רציונלים שגבולה 0, נובע ש- $a^{r'_n - r_n} \to 1$ ולכן נקבל ש:

$$\lim a^{r'_n} = \lim a^{r_n}$$

e

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

<u>לוגריתמים</u>

$$a^{b} = x \Leftrightarrow \log_{a} x = b$$

$$e^{b} = x \Leftrightarrow \ln x = b$$

$$\log_{b}(b^{x}) = x$$

$$b^{\log_{b} x} = x$$

$$\ln(e^{x}) = x$$

$$e^{\ln x} = x \Leftarrow x > 0$$

$$\log_{b}(ac) = \log_{b} a + \log_{b} c$$

$$\log_{b}(a/c) = \log_{b} a - \log_{b} c$$

$$\log_{b} a^{r} = r \log_{b} a$$

$$\log_{b}(1/c) = -\log_{b} c$$

$$\log_{m} x = \frac{\log_{a} x}{\log_{a} m}$$

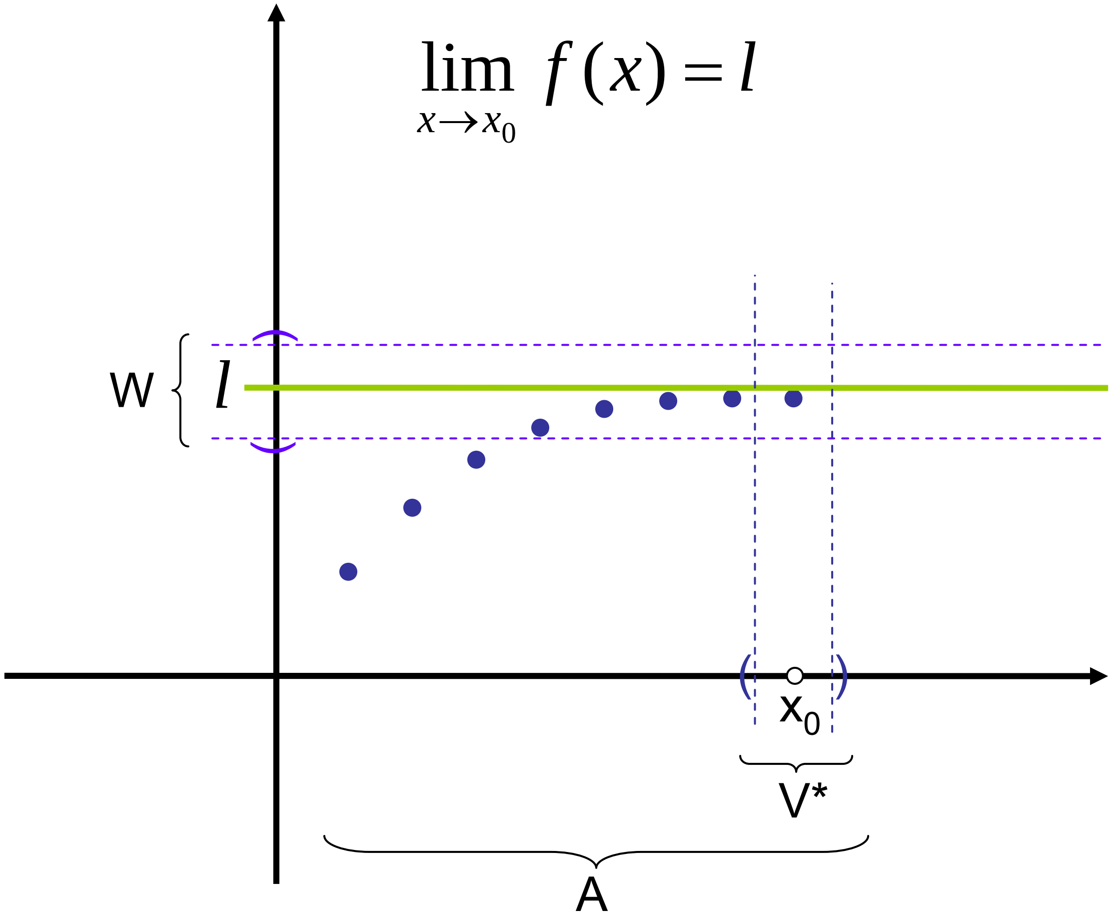
$$y = b^{x} \Leftrightarrow x = \log_{b} y \Leftrightarrow y > 0$$

$$y = e^{x} \Leftrightarrow x = \ln y \Leftrightarrow y > 0$$

גבול של פונקציה

תהי $f:A\subset R\rightarrow R$ ו- x_0 נקודת הצטברות של A ב- $\overline{R}$. מספר $l\in\overline{R}$ נקרא גבול של f בנקודה x_0, אם לכל סביבה W של l קיימת סביבה מנוקבת V* של x_0 כך ש:

$$x\in V^*\cap A\Rightarrow f(x)\in W$$



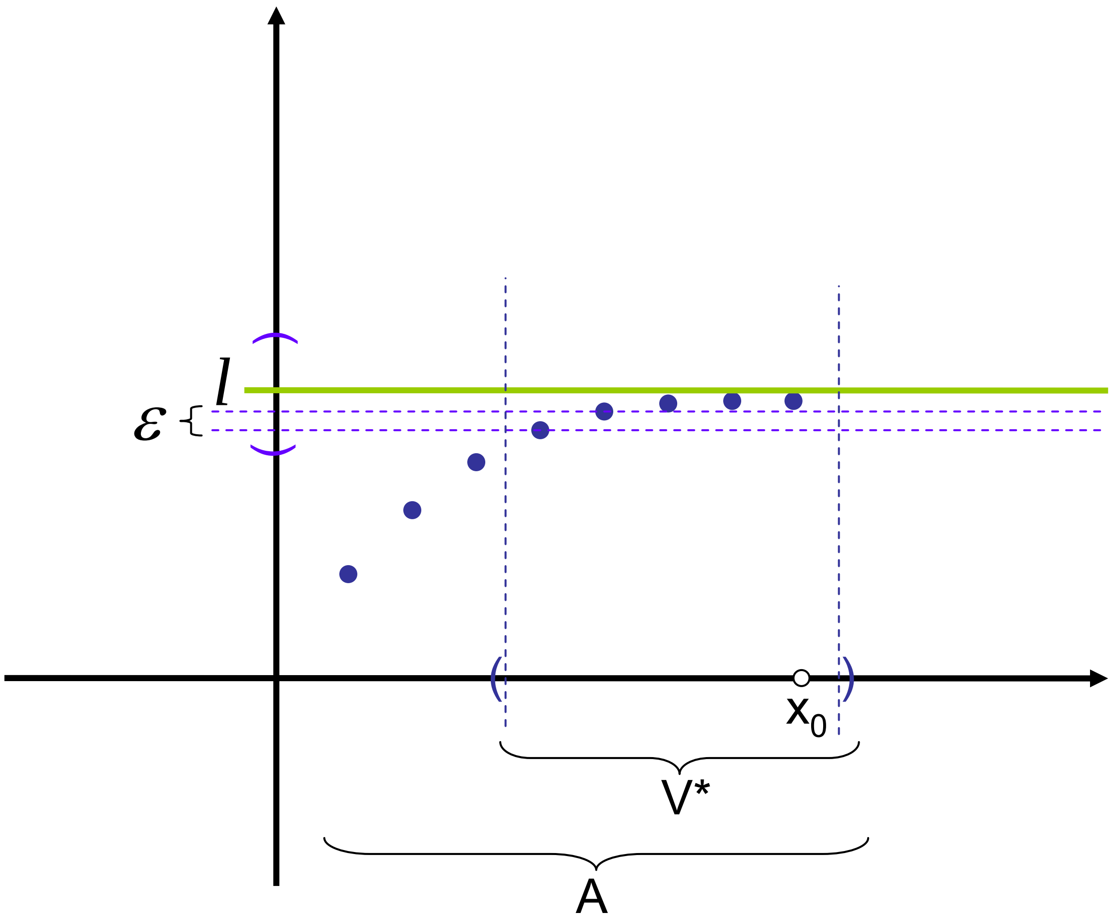
גבול של פונקציה (המשך)

תהי $f: A \to R$ ו- x_0 נקודת הצטברות של A ב $\overline{R}$ אזי ל- f לכל היותר גבול אחד ב- x_0.

הקריטריון של Bolzano-Cauchy

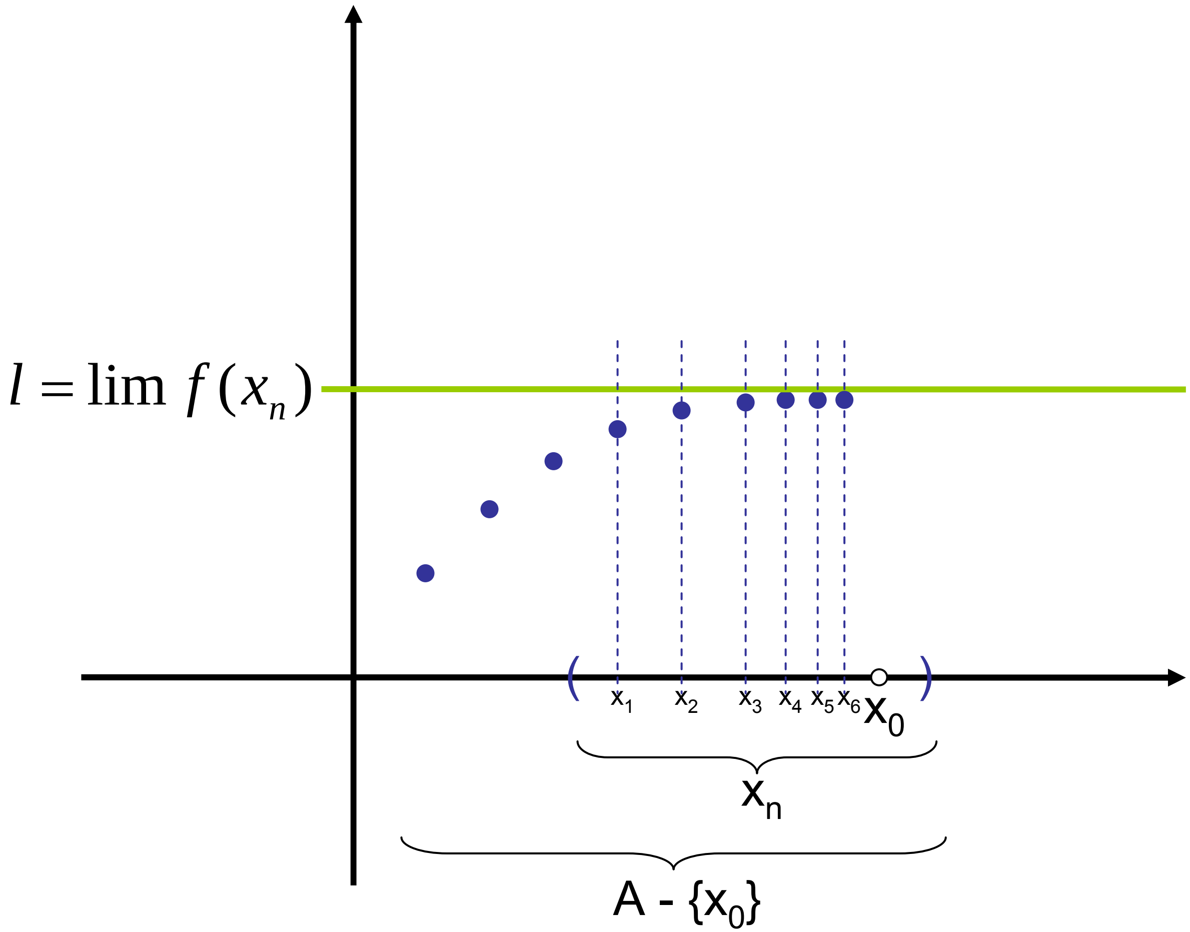
תהי $f: A \to R$ ו- x_0 נקודת הצטברות של A ב- $\overline{R}$. ל f גבול סופי ב- x_0 אם ורק אם לכל $\varepsilon > 0$ קיימת סביבה V^* של x_0 כך שלכל $x, y \in V^* \cap A$ קיים:

$$| f(x) - f(y) | < \varepsilon$$



הקריטריון של Stolz

תהי $f : A \to R$ ו- x_0 נקודת הצטברות של A ב- $\overline{R}$. ל f יש גבול ב- x_0 אם ורק אם עבור כל סדרה x_n שאבריה ב- $A - \{x_0\}$ והשואפת ל x_0, לסדרה $f(x_n)$ קיים גבול.

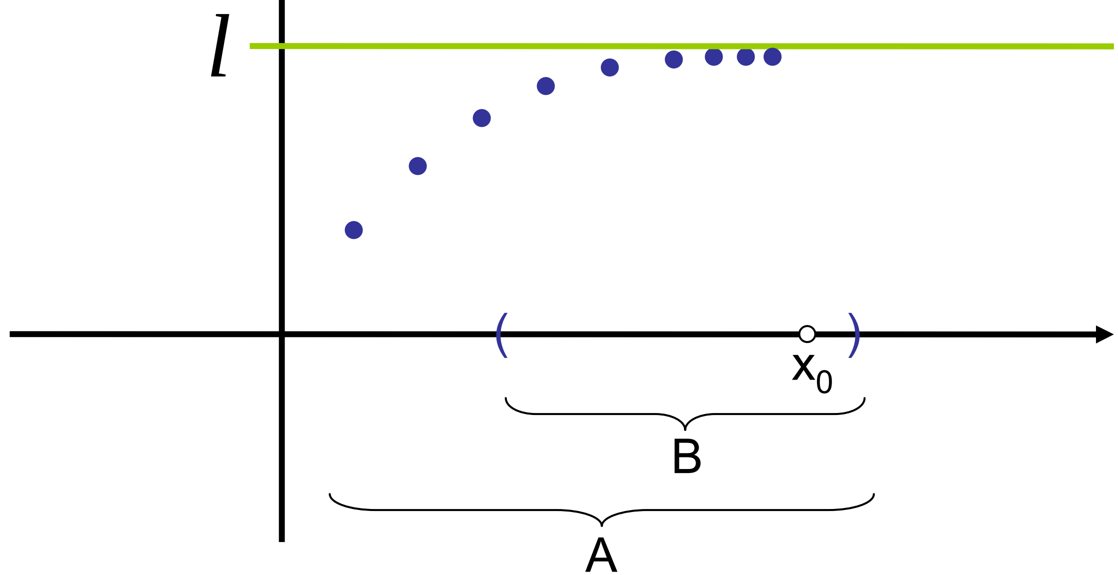


Heine – l הוא גבול של f בנקודה x_0 אם עבור כל סדרה x_n שאבריה ב $A - \{x_0\}$ והשואפת ל x_0 קיים $f(x_n) \to l$.

גבול של פונקציה ביחס לתת קבוצה

תהי $f:A\to R$ ו- x_0 נקודת הצטברות סופית או לא של A. תהי $B\subset A$ כך ש- x_0 היא נקודת הצטברות של B. נאמר שהמספר l הוא הגבול של f ב- x_0 יחסית ל B, אם ל- $f_{/B}$ הגבול l בנקודה x_0, ונרשום:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in B}} f(x)=l$$



גבול של פונקציה ביחס לתת קבוצה (המשך)

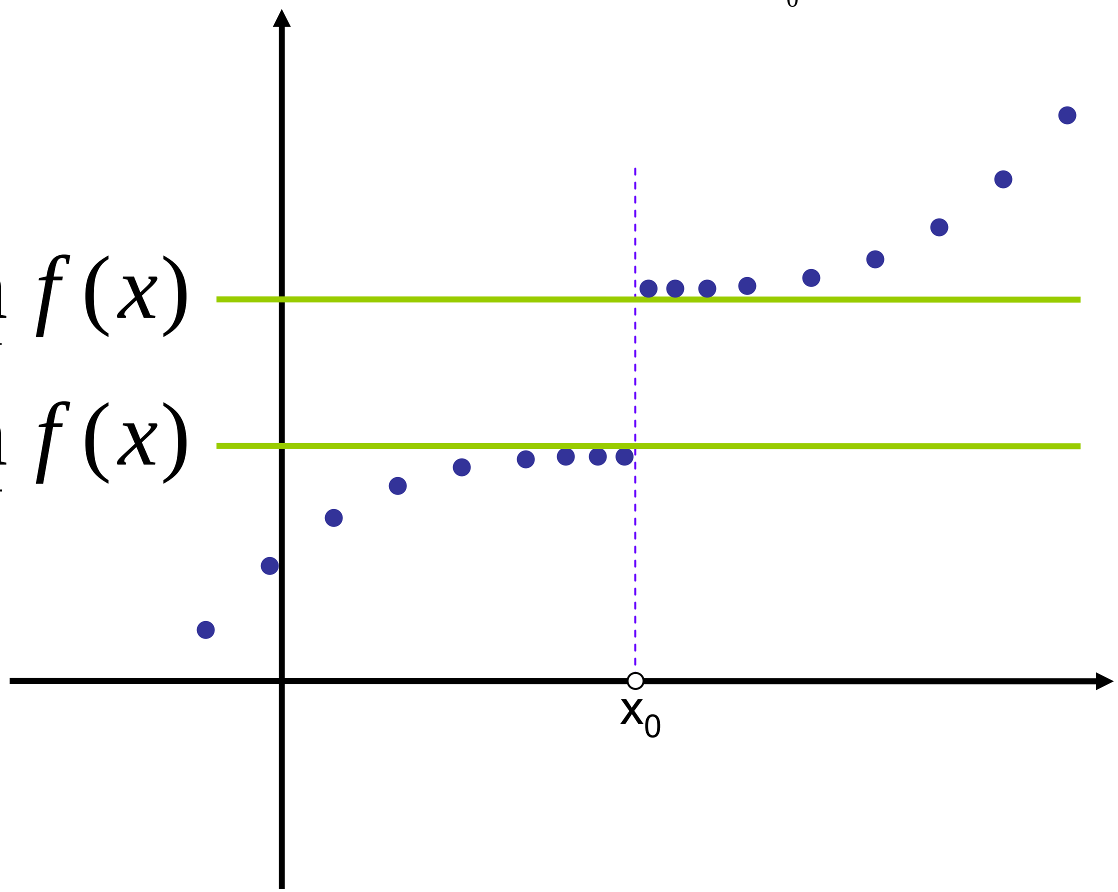
תהי $f : A \to R$ ו- x_0 נקודת הצטברות של A. אם קיים $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ אזי עבור כל $B \subset A$ כך ש x_0 היא נקודת הצטברות שלה מתקיים:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in B}} f(x) = l$$

ההיפך אינו נכון!

גבולות צדדיים

$$A_{x_0-}=A\cap(-\infty,x_0)\qquad A_{x_0+}=A\cap(x_0,+\infty)$$



$$\lim_{x\to x_0+}f(x)$$ גבול ימני

$$\lim_{x\to x_0-}f(x)$$ גבול שמאלי

ל f קיים גבול ב- x_0 אם ורק אם קיימים ב x_0 שני גבולות צדדיים והם שווים, ואז:

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\lim_{x\to x_0-}f(x)=\lim_{x\to x_0+}f(x)$$

פעולות בגבולות של פונקציות

אם קיימים **וסופיים** הגבולות $\lim_{x\to x_0} f(x), \lim_{x\to x_0} g(x)$ אזי:

$$\lim_{x\to x_0}(f+g)(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)$$

$$\lim_{x\to x_0}(\lambda f)(x) = \lambda \lim_{x\to x_0}(f)(x)$$

$$\lim_{x\to x_0}(fg)(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x)$$

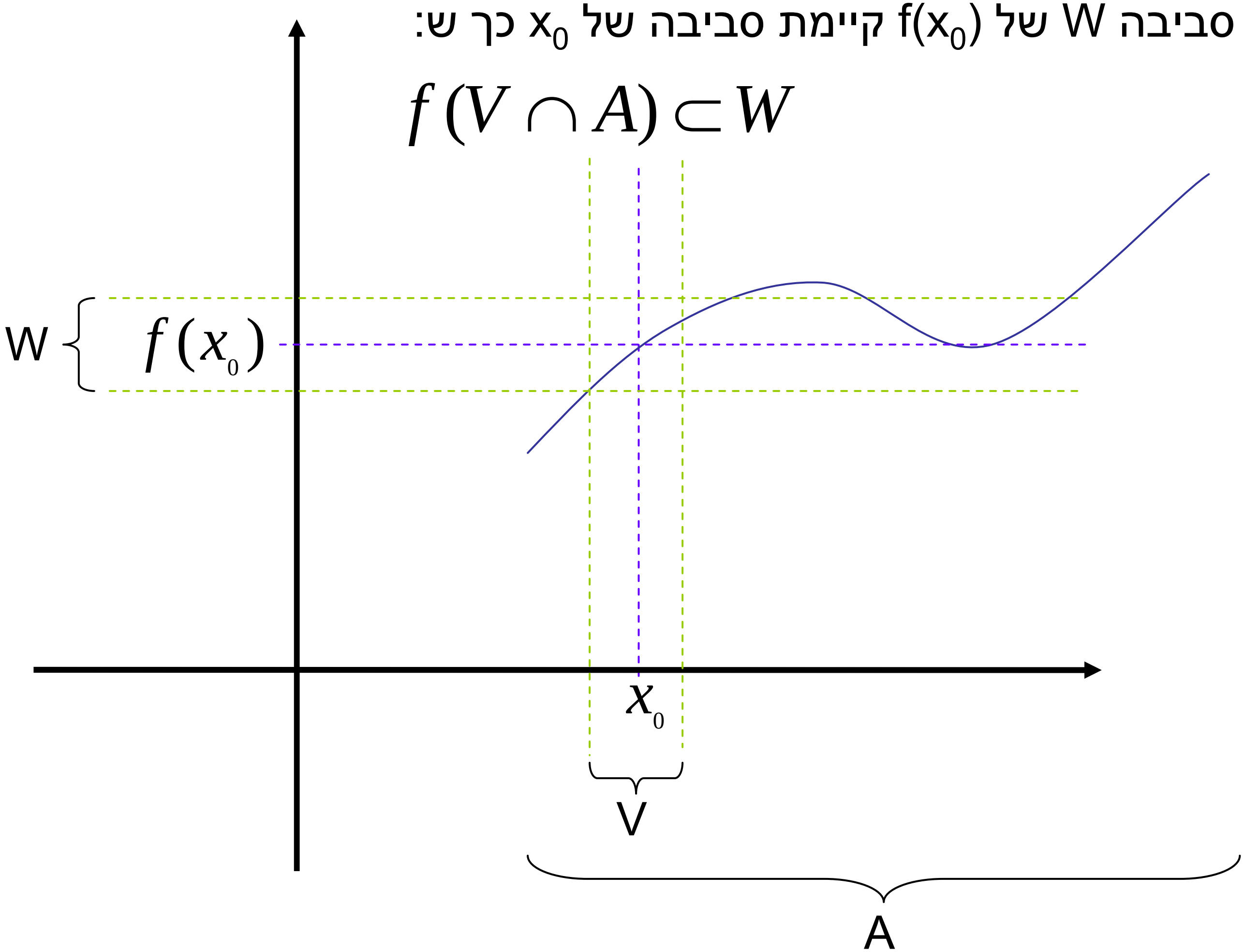
$$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)^{\lim_{x\to x_0} g(x)}$$

פונקציות רציפות

תהי פונקציה $f: A \subset R \to R$ ו $x_0 \in A$. נאמר ש f רציפה בנקודה x_0 (או ש x_0 נקודת רציפות של f אם לכל סביבה W של $f(x_0)$ קיימת סביבה של x_0 כך ש:

$$f(V \cap A) \subset W$$



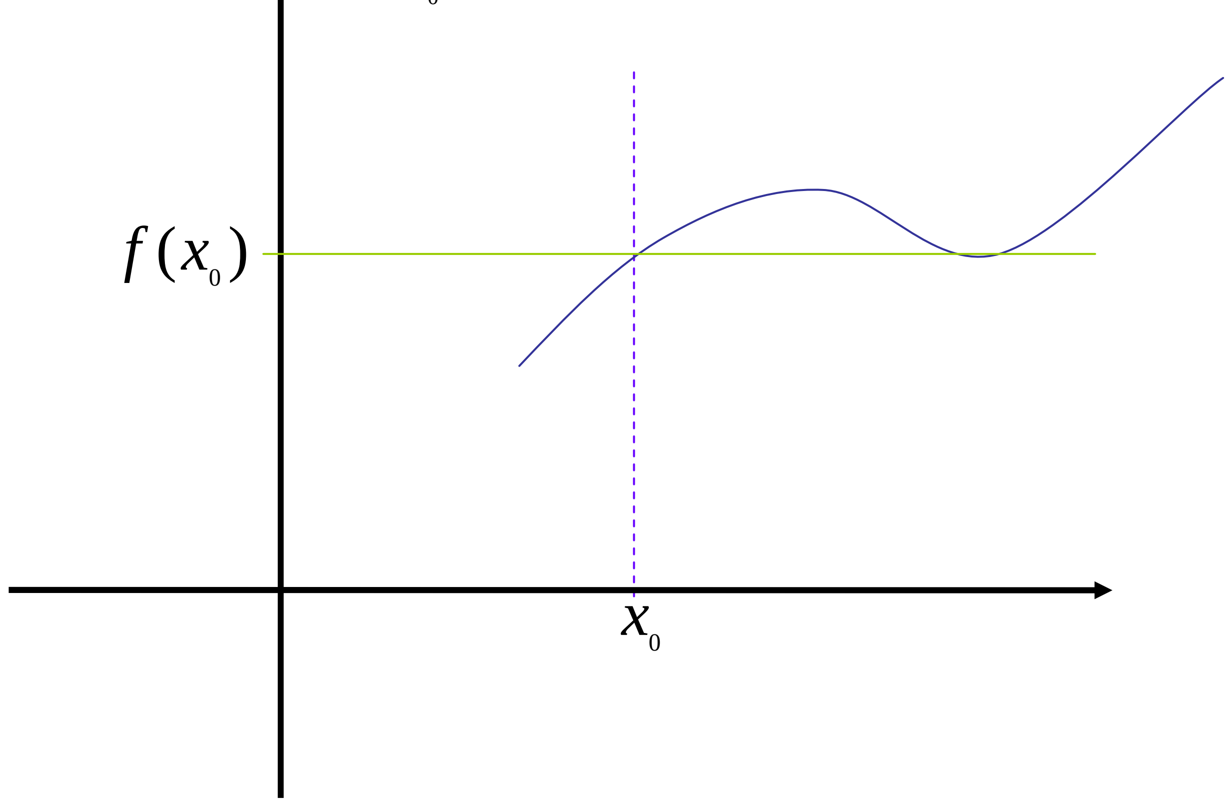
אם x_0 נקודה מבודדת של A אז f רציפה ב x_0 משום שתמיד מתקיים: $f(V \cap A) = \{f(x_0)\} \subset W$

תהי פונקציה $f: A \to R$ ו $x_0 \in A$. נאמר ש f רציפה מימין (משמאל) ב x_0 אם היא רציפה בנקודה זאת יחסית לקבוצה $A \cap [x_0, +\infty)$ $(A \cap (-\infty, x_0])$

פונקציות רציפות (המשך)

תהי פונקציה $f:A\to R$ ו $x_0\in A\cap A'$. נאמר ש f רציפה בנקודה x_0 אם ורק אם לפונקציה f יש גבול בנקודה x_0 והוא שווה לערך שלה בנקודה זו, כלומר:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$



אם x_0 היא נקודת הצטברות של $A\cap[x_0,+\infty)$ $(A\cap(-\infty,x_0])$ אזי f רציפה מימין (משמאל) בנקודה זו, אם ורק אם קיים הגבול מימין (משמאל) והוא שווה ל $f(x_0)$.

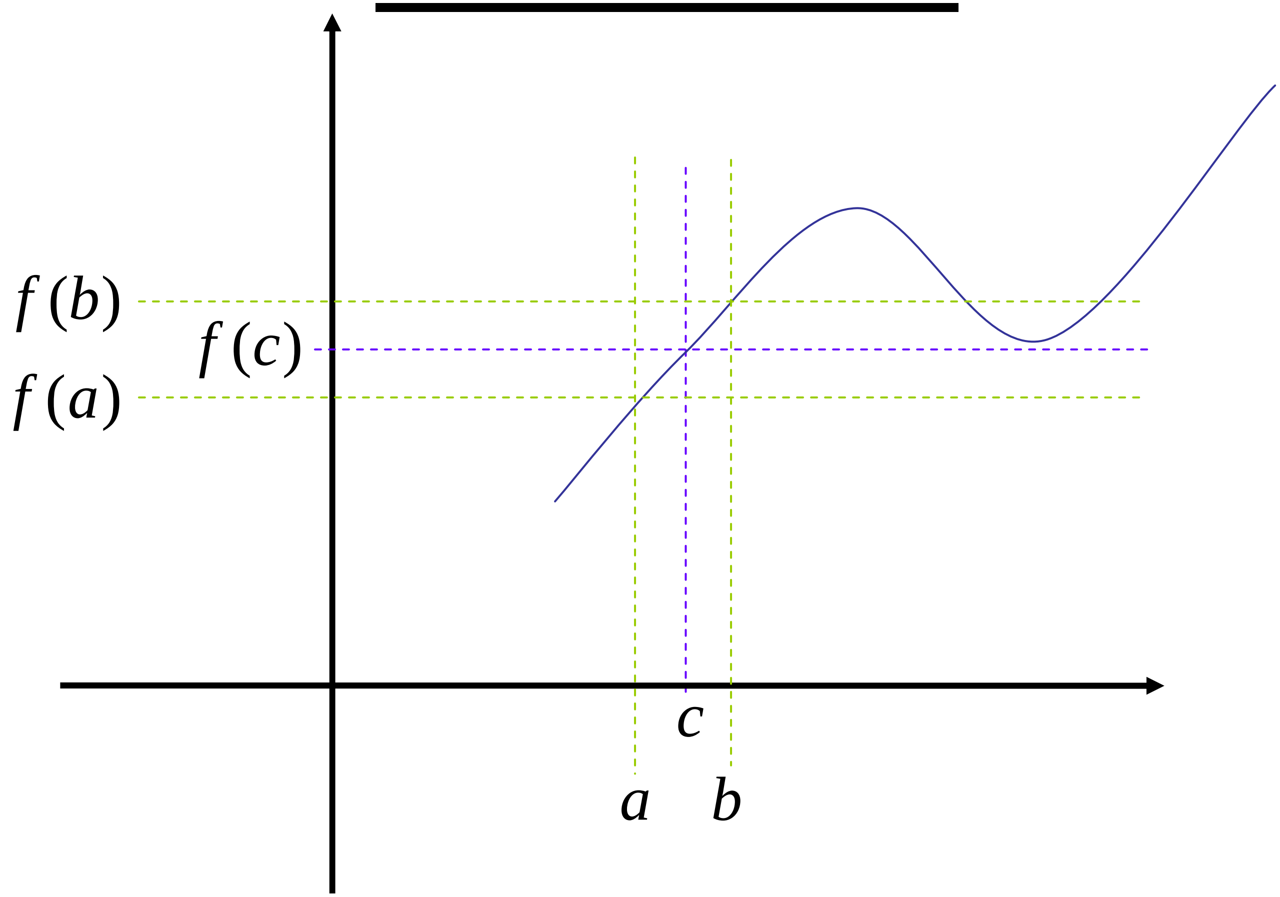
פונקציות רציפות (המשך)

הרכבה של שתי פונקציות רציפות יוצרת פונקציה רציפה.

תהי $A \subset R$ קומפקטית, ו f רציפה על A, אזי f(A) היא קבוצה קומפקטית.

תהי A קומפקטית ו $f : A \to R$ רציפה, אזי f חסומה ומשיגה את חסמיה.

תכונת Darboux



משפט (Bolzano) – אם f רציפה על רווח I אזי יש לה תכונת Darboux על I.
כלומר, עבור a<c<b קיים f(a)<f(c)<f(b).

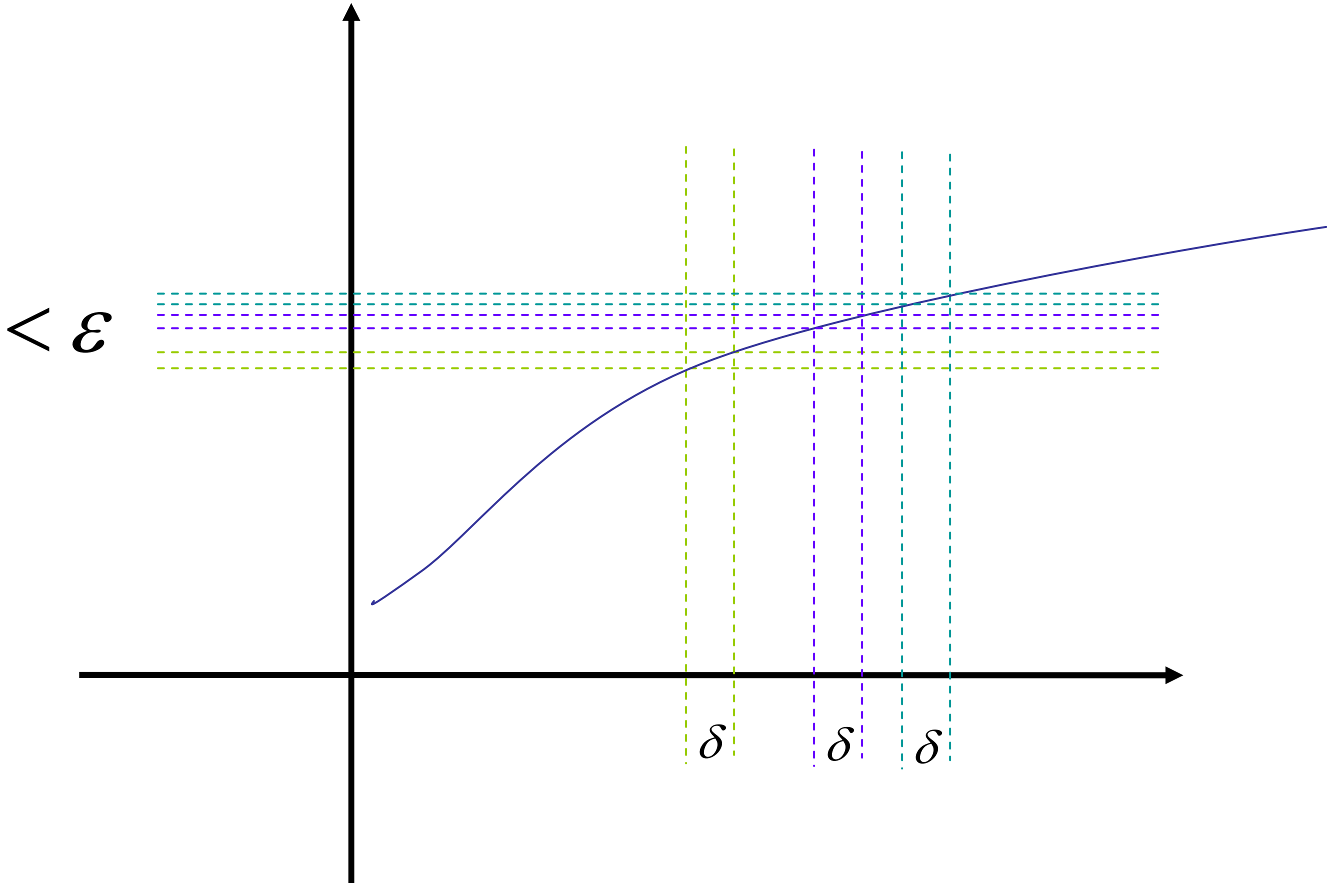
$$f(x)\cdot f(y)<0 \Rightarrow \exists z. f(z)=0$$

אם f חח"ע אז היא מונוטונית במובן הצר.

רציפות במידה שווה

אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל $x, y \in A$ עבורם $|x - y| < \delta$ קיים:

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$$



אם פונקציה רציפה במ"ש היא גם רציפה, ההיפך אינו נכון.

משפט Heine

תהי f פונקציה רציפה על קבוצה $A \subset R$ קומפקטית. אזי f רציפה במ"ש על A.