אלגברה ליניארית 2

משפטים מההרצאות של פרופסור מיכאל קריבילביץ'

עורך: אודי רובינשטיין
http://www.cs.tau.ac.il/~ehudrubi

עודכן בתאריך: 30/08/2004

פולינומים

הגדרה:

יהי F שדה, הביטוי: $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$ נקרא פולינום.
x משתנה הפולינום.
הסקלרים $a_n,a_{n-1},...,a_0\in F$ הם המקדמים של הפולינום.

סימון:

נסמן ב $F[x]$ את אוסף כל הפולינומים במשתנה x עם מקדמים מ- F.

הגדרה:

יהי $p(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i\in F[x]$ פולינום. המעלה של p(x), המסומנת ב $\deg p$ היא מספר טבעי k מרבי עבורו $a_k\neq 0$.

הגדרה:

פולינום $p(x)\in F[x]$ ממעלה k נקרא מתוקן אם $a_k=1$.

סימון:

נסמן ב $F_n[x]$ את אוסף על הפולינומים ממעלה לכל היותר n עם ממקדמים משדה F.

פעולות עם פולינומים

חיבור:

יהיו $p_1(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$, $p_2(x)=\sum_{i=0}^{n}b_ix^i$ פולינומים.

החיבור p_1+p_2 הוא פולינום ב $F[x]$ המוגדר ע"י: $(p_1+p_2)(x)=\sum_{i=0}^{n}(a_i+b_i)x^i$.

כפל בסקלר:

יהי $p(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i\in F[x]$ פולינום. יהי $\lambda\in F$ סקלר. הכפל בסקלר λp הוא פולינום המוגדר ע"י: $(\lambda p)(x)=\sum_{i=0}^{n}(\lambda a_i)x^i$.

משפט:

אוסף הפולינומים $F[x]$ יחד עם פעולות חיבור וכפל בסקלר הוא מרחב וקטורי מעל שדה F.

משפט:

אוסף הפולינומים $F_n[x]$ ממעלה לכל היותר n עם מקמים משדה F, יחד עם פעולות חיבור וכפל בסקלר הוא מרחב וקטורי מעל F ממימד n+1.
$F_n[x]$ הוא תת מרחב של $F[x]$.

כפל:

הגדרה:

יהיו $p_1(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, $p_2(x)=\sum_{i=0}^{m} b_i x^i$ פולינומים. הכפל $p_1 \cdot p_2$ הוא פולינום ב $F[x]$

המוגדר ע"י: $(p_1 \cdot p_2)(x)=\sum_{i=0}^{n+m} c_i x^i$

כאשר $c_i=\sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j}$, $0 \le i \le m+n$.

משפט:

יהיו $p_1, p_2 \in F[x]$ פולינומים, אזי: $\deg(p_1 \cdot p_2)=\deg p_1+\deg p_2$.

משפט:

יהיו $f, g \in F[x]$ פולינומים אזי קיימים פולינומים יחידים $q, r \in F[x]$ כך ש:

$f=q \cdot g+r$

$\deg r<\deg g$

כאשר: $\deg g \ge 0$.

שורשים של פולינומים

הגדרה:

יהי $p(x) \in F[x]$ פולינום, סקלר $\lambda \in F$ נקרא **שורש** של p אם $p(\lambda)=0$.

משפט בזו (Bezout):

יהי $\lambda \in F$ שורש של פולינום $p(x) \in F[x]$ אזי p(x) מתחלק ב $(x-\lambda)$, כלומר קיים $q(x) \in F[x]$ כך ש: $p=q(x-\lambda)$.

משפט הפוך:

יהי $p(x) \in F[x]$ פולינום ויהי $\lambda \in F$ סקלר. אם p(x) מתחלק ב $(x-\lambda)$ אז λ הוא שורש של p.

ריבוי של שורש

דוגמא:

$p(x)=(x-1)^2(x+2) \in R[x]$

$\lambda=1$ שורש מריבוי 2.

$\lambda=-2$ שורש מריבוי 1.

הגדרה:

יהי $p(x) \in F[x]$ פולינום ויהיו $\lambda_1,\ldots,\lambda_k \in F$ שורשים שונים של p(x), אזי p(x) מתחלק ב $(x-\lambda_1)\ldots(x-\lambda_k)$.

מסקנה:

יהי $p(x) \in F[x]$ פולינום ממעלה $n \ge 0$, אז ל- p יש לכל היותר n שורשים שונים.

אידאלים

הגדרה:

F שדה. קבוצה $I \subseteq F[x]$ נקראת אידיאל אם:

1. $0 \in I$.
2. לכל $f_1, f_2 \in I$ קיים $f_1 + f_2 \in I$.
3. לכל $f \in I$ ולכל $g \in F[x]$ קיים $f \cdot g \in I$.

הגדרה:

יהיו $f_1, ..., f_n \in F[x]$ פולינומים. הקבוצה $I = \{g_1 f_1 + ... + g_n f_n : g_1, ..., g_n \in F[x]\}$ נקראת האידיאל הנוצר ע"י $f_1, ..., f_n$ ומסומנת ב $I =< f_1, ..., f_n >$.

משפט:

יהי F שדה ויהי $I \subseteq F[x]$ אידיאל אז קיים פולינום $g \in F[x]$ כך ש $I =< g >$.

מחלק משותף מקסימלי

הגדרה:

יהיו $f_1, ..., f_n \in F[x]$ פולינומים, פולינום $g \in F[x]$ הוא מחלק משותף מקסימלי של $f_1, ..., f_n$ אם:

1. g מחלק את $f_1, ..., f_n$.
2. אם פולינום $h \in F[x]$ מחלק את $f_1, ..., f_n$ אזי h מחלק את g.

משפט:

יהיו $f_1, f_2 \in F[x]$ פולינומים. יהי g פולינום המקיים $< f_1, f_2 >=< g >$ אזי g הוא מ.מ.מ של f_1, f_2.

סימון:

נסמן את מ.מ.מ. של $f_1, ..., f_n$ ב $\gcd(f_1, ..., f_n)$.

הערה:

לכל f_1, f_2, $\gcd(f_1, f_2)$ זאת קבוצה של פולינומים שהם אחד כפולה של השני בקבוע שונה מ-0. בתוך הקבוצה הזאת קיים פולינום מתוקן יחיד שהוא מ.מ.מ של f_1, f_2.

משפט:

יהיו $f_1, ..., f_n \in F[x]$ פולינומים. אזי $f_1, ..., f_n \in F[x]$ $< f_1, ..., f_n >=< \gcd(f_1, ..., f_n) >$.

פולינומים אי-פריקים

הגדרה:

פולינום $p(x) \in F[x]$ נקרא אי-פריק אם:

1. $\deg(p) \geq 1$.
2. לא קיימים פולינומים $f, g \in F[x]$ כך ש $\deg(f), \deg(g) \geq 1$ ו- $p = fg$.

משפט הפירוק לפולינומים אי פריקים:
יהי $p(x)\in F[x]$ פולינום ממעלה 1 לפחות. אזי קיימים פולינומים אי-פריקים $p_1(x),...,p_n(x)\in F[x]$ כך ש $p=p_1p_2...p_n$, ויתרה מזאת, אם $p=q_1...q_m$ כאשר $q_1,...,q_m\in F[x]$ פולינומים אי-פריקים אז m=n, וקיימת תמורה σ על n איברים וקבועים $\lambda_1,...,\lambda_n\in F$ כך ש $p_i=\lambda_i q_{\sigma(i)}$ $1\le i\le n$. (זהו משפט קיום ויחידות).

מסקנה:
אם פולינום אי-פריק $p(x)\in F[x]$ מחלק את המכפלה $f_1\cdot...\cdot f_n$, אזי קיים $1\le i\le n$ כך ש p מחלק את f_i.

פולינומים מרוכבים

המשפט היסודי של האלגברה:
יהי $p(x)\in C[x]$ פולינום מרוכב ממעלה 1 לפחות אזי ל p(x) קיים שורש מרוכב $\lambda\in C$.

משפט:
הפולינומים האי-פריקים היחידים ב C(x) הם פולינומים לינאריים.

מסקנה:
יהי $p(x)\in C[x]$ פולינום ממעלה $n\ge 1$. אזי קיימים קבועים $\lambda_1,...,\lambda_n\in C$ (לאו דווקא שונים) וקבוע נוסף $0\ne c\in C$ כך ש: $p(x)=c(x-\lambda_1)...(x-\lambda_n)$.
כלומר, כל פולינום ב- C ניתן לפירוק לגורמים לינאריים.

פולינומים ממשיים

נשים לב:
לא לכל פולינום ממשי יש שורש ממשי.

משפט:
הפולינומים האי-פריקים ב- R[x] הם פולינומים ליניאריים ופולינומים ריבועיים ללא שורשים ממשיים.

למה:
יהי $p(x)\in C[x]$ פולינום עם מקדמים ממשיים. יהי $\lambda\in C$ שורש של p(x) אזי גם $\bar{\lambda}$ הוא שורש של p(x).

למה:
יהיו $p_1,p_2\in C[x]$ פולינומים עם מקדמים ממשיים. נניח כי p_1 מתחלק ב p_2 בתוך C[x].
אזי p_1 מתחלק ב p_2 כבר בתוך R[x].

מסקנה:
יהי $p(x)\in R[x]$ פולינום ממעלה 1 לפחות. אזי קיימים פולינומים מתוקנים $q_1,...,q_m\in R[x]$ וקבוע $c\in R$ כך ש: $p(x)=cq_1(x)...q_m(x)$. ולכל $1\le i\le m$ q_i הוא פולינום ליניארי או פולינום ריבועי ללא שורשים ממשיים.

מסקנה:
יהי $p(x) \in R[x]$ פולינום ממעלה אי-זוגית, $\deg p(x) = 2n+1$, אזי ל p(x) קיים שורש ממשי.

ערכים עצמיים ולכסון

מטריצה אלכסונית:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

הגדרה:
יהי V מרחב וקטורי n מימדי מעל שדה F. תהי $T: V \to V$ העתקה לינארית. T נקראת לכסינה (או ניתנת לליכסון) אם קיים בסיס B של V שבו מטריצת הייצוג $[T]_B$ היא מטריצה אלכסונית.

הגדרה:
תהי $A \in M_{nxn}(F)$ מטריצה. A נקראת לכסינה (או ניתנת לליכסון) אם היא דומה למטריצה אלכסונית, כלומר, קיימת מטריצה הפיכה $P \in M_{nxn}(F)$ ומטריצה אלכסונית $D \in M_{nxn}(F)$ כאשר $D = P^{-1}AP$.

משפט:
העתקה ליניארית $T: V \to V$ על מרחב וקטורי סוף מימדי V היא לכסינה אם ורק אם קיים בסיס $B = \{v_1, ..., v_n\}$ של V ($n = \dim V$) כך ש: $Tv_i = \lambda_i v_i$ עבור כל $1 \le i \le n$, כאשר $\lambda_i \in F$.
כלומר, אם $Tv_i = \lambda_i v_i$ אז כל עמודה במטריצה מכילה ערך אחד שהוא λ_i, ואז היא אלכסונית.

הגדרה:
יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F. תהי $T: V \to V$ העתקה ליניארית. סקלר $\lambda \in F$ נקרא ערך עצמי של T אם קיים וקטור $0 \ne v \in V$ כך ש $Tv = \lambda v$.
וקטור כזה ייקרא וקטור עצמי השייך לערך עצמי λ.

מסקנה:
העתקה ליניארית $T: V \to V$ לכסינה אם ורק אם קיים בסיס של V המורכב מוקטורים עצמיים של T.

וקטורים עצמיים השייכים לאותו ערך עצמי

טענה:
תהי $T: V \to V$ העתקה ליניארית, יהי $\lambda \in F$ ערך עצמי, אזי הקבוצה $V_\lambda = \{v \in V : Tv = \lambda v\}$ היא תת מרחב של V.

הגדרה:
הקבוצה V_λ הנ"ל נקראת תת-מרחב עצמי השייך לע"ע (ערך עצמי) λ.

משפט:
תהי $T:V\to V$ העתקה ליניארית ויהיו $\lambda_1,...,\lambda_k\in F$ ע"ע שונים של T. אם $v_1,...,v_k\in V$ ו"ע השייכים לע"ע $\lambda_1,...,\lambda_k$ בהתאמה ($Tv_i=\lambda_i v_i$, $i=1,...,k$) אזי הקבוצה $\{v_1,...,v_k\}$ היא בת"ל ב-V.

מסקנה:
V הוא מרחב וקטורי n מימדי, ותהי $T:V\to V$ העתקה ליניארית. נניח כי ל-T n ע"ע שונים, אזי T לכסינה.
(תנאי זה הוא מספיק לליכסון אבל לא הכרחי).

העתקות ומטריצות לכסינות

טענה:
תהי $T:V\to V$ העתקה ליניארית, ותהי $A=[T]_B$ מטריצת הייצוג של T לפי בסיס B של V. אזי ל-T ול-A אותם ע"ע. יתרה מזאת, $v\in V$ הוא ו"ע של T השייך לע"ע $\lambda\in F$ אם ורק אם הוקטור $[v]_B$ הוא וקטור עצמי של A השייך לע"ע λ.

מסקנה:
למטריצות דומות אותם ערכים עצמיים.

משפט:
תהי $T:V\to V$ העתקה ליניארית ותהי $A=[T]_B$ מטריצת הייצוג של T לפי בסיס B של V.
אזי T לכסינה אם ורק אם A לכסינה.

מסקנה:
נניח A, B מטריצות דומות, אזי A לכסינה אם ורק אם B לכסינה.

הגדרה:
מטריצה הפיכה $P\in M_{nxn}(F)$ מלכסנת את מטריצה $A\in M_{nxn}(F)$ אם המטריצה $P^{-1}AP$ היא מטריצה אלכסונית.

משפט:
תהינה $A,P\in M_{nxn}(F)$ מטריצות, נניח כי P הפיכה, אזי P מלכסנת את A אם ורק אם העמודות של P הן וקטורים עצמיים של A.

הפולינום האופייני

משפט:
תהי $A\in M_{nxn}(F)$ אזי $\lambda\in F$ הוא ע"ע של A אם ורק אם $\det(\lambda I_n-A)=0$.

הגדרה:
תהי $A=\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$ מטריצה.

המטריצה: $tI_n - A = \begin{pmatrix} t-a_{1,1} & \cdots & -a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n,1} & \cdots & t-a_{n,n} \end{pmatrix}$

נקראת המטריצה האופיינית של A.

<u>הגדרה:</u>
תהי $A \in M_{nxn}(F)$ מטריצה, הביטוי: $\det(tI_n - A)$ נקרא הפולינום האופייני של A ומסומן ב- $P_A(t)$.

<u>משפט:</u>
תהי $A \in M_{nxn}(F)$ מטריצה אזי הפולינום האופייני $P_A(t)$ של A הוא פולינום מתוקן ממעלה n ב F[t].

<u>טענה:</u>
למטריצות דומות יש אותו פולינום אופייני.

<u>הגדרה:</u>
תהי $T:V \to V$ העתקה ליניארית של מרחב וקטורי סוף מימדי V. הפולינום האופייני $P_T(t)$ של T הוא הפולינום האופייני של מטריצת הייצוג $A = [T]_B$ של T לפי בסיס B כלשהו של V.

<u>הפולינום האופייני וליכסון</u>

<u>טענה:</u>
אם $D = diag(\lambda_1,...,\lambda_n) \in M_{nxn}(f)$ היא מטריצה אלכסונית, אזי:
$P_D(t) = (t-\lambda_1)...(t-\lambda_n)$.

<u>מסקנה:</u>
אם העתקה $T:V \to V$ לכסינה אזי הפולינום האופייני $P_T(t)$ מתפרק לגורמים ליניאריים:
$P_T(t) = (t-\lambda_1)...(t-\lambda_n)$.
(התנאי הנ"ל הוא תנאי הכרחי לליכסון אבל לא תנאי מספיק).

<u>ריבוי אלגברי וריבוי גאומטרי</u>

<u>הגדרה:</u>
תהי $T:V \to V$ העתקה ליניארית של מרחב וקטורי V מעל שדה F. יהי $\lambda \in F$ ע"ע של T.
הריבוי של λ כשורש של הפולינום האופייני $P_T(t)$ נקרא הריבוי האלגברי של λ.
המימד של תת המרחב העצמי ב-V נקרא הריבוי הגאומטרי של λ.

<u>משפט:</u>
תהי $T:V \to V$ העתקה ליניארית של מרחב וקטורי V מעל שדה F, ויהי $\lambda \in F$ ע"ע של T.
אזי הריבוי הגיאומטרי של λ אינו עולה על הריבוי האלגברי.

תנאי מספיק והכרחי לליכסון

<u>משפט:</u>
תהי $T:V\to V$ העתקה ליניארית של מרחב וקטורי V ממימד $n\geq 1$ אזי: T לכסינה אם ורק אם הפולינום האופייני $P_T(t)$ של T מפרק לגורמים ליניאריים ולכל ע"ע $\lambda\in F$ של T, הריבוי האלגברי של λ שווה לריבויו הגיאומטרי.

אלגוריתם הליכסון

<u>נתון:</u>
העתקה ליניארית $T:V\to V$.

<u>המטרה:</u>
לנסות ולמצוא בסיס B של V שבו $[T]_B$ אלכסונית.

1. נייצג את T לפי בסיס כלשהו B_0 של V, נקבל מטריצת הייצוג $A=[T]_{B_0}$.
2. פרקו את הפולינום האופייני $P_T(t)=P_A(t)$ לגורמים אי-פריקים. אם $P_T(t)$ אינו מתפרק לגורמים ליניאריים – עצרו! T אינה לכסינה. אחרת: $P_T(t)=P_A(t)=(t-\lambda_1)^{S_1}...(t-\lambda_k)^{S_k}$ כאשר $\lambda_i\neq\lambda_j$ לכל $1\leq i\neq j\leq k$.
3. לכל $1\leq i\leq k$, מצא בסיס B_i של תת מרחב עצמי: $V_\lambda=\{v\in V: Tv=\lambda v\}$. אם קיים $1\leq i\leq k$ עבורו $S_i\geq \dim V_{\lambda_i}\geq |B_i|$ - עצרו! T אינה לכסינה.
4. הגדירו: $B=\bigcup_{i=1}^{k}B_i$, אזי B הוא הבסיס הדרוש.

$$[T]_B=\begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_1\end{matrix}}_{S_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \underbrace{\begin{matrix}\lambda_k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda k\end{matrix}}_{S_k}\end{pmatrix}$$

אלגוריתם הליכסון למטריצות

<u>נתון:</u>
מטריצה $A\in M_{nxn}(F)$.

<u>המטרה:</u>
לנסות ולמצוא מטריצה הפיכה P ומטריצה אלכסונית D כך ש: $D=P^{-1}AP$.

1. מציאת הפולינום האופייני $P_A(t)$ ופירוקו לגורמים. אם $P_A(t)$ לא מתפרק לגורמים ליניאריים – A אינה לכסינה.

2. נניח: $P_A(t)=(t-\lambda_1)^{S_1}...(t-\lambda_k)^{S_k}$. לכל $1\le i\le k$ נמצא בסיס B_i של תת מרחב עצמי V_{λ_i}. אם $|B_i|\le S_i$ עבור i מסוים – A לא לכסינה.
3. העמודות של P הן ו"ע של A מקבוצות $B_1,...,B_k$.

$$P=\begin{pmatrix} | & | & & | \\ | & | & ... & | \\ | & | & & | \\ B_1 & B_2 & & B_k \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_1\end{matrix}}_{S_1} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \underbrace{\begin{matrix}\lambda_k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda k\end{matrix}}_{S_k} \end{pmatrix}$$

שילוש של העתקות ליניאריות

הגדרה:
מטריצה $A\in M_{nxn}(F)$ היא משולשית עליונה אם $a_{i,j}=0$ עבור כל $1\le i<j\le n$.

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

טענה:
אם $A\in M_{nxn}(F)$ משולשית עליונה עם ערכים $\lambda_1,...,\lambda_n\in F$ באלכסון, אזי:
$\det A=\prod_{i=1}^{n}\lambda_i$.

טענה:
אם $A\in M_{nxn}(F)$ משולשית עליונה עם ערכים $\lambda_1,...,\lambda_n\in F$ באלכסון אזי:
$P_T(t)=(t-\lambda_1)...(t-\lambda_n)$.

מסקנה:
אם $A\in M_{nxn}(F)$ משולשית עליונה עם ערכים $\lambda_1,...,\lambda_n\in F$ באלכסון אז הע"ע של A הם $\lambda_1,...,\lambda_n$.

טענה:
תהי $T:V\to V$ העתקה ליניארית של מרחב וקטורי n מימדי V. יהי $B=\{v_1,...,v_n\}$ בסיס של V, אזי מטריצת הייצוג $[T]_B$ היא משולשית עליונה אם ורק אם לכל $1\le i\le n$ קיים: $T(v_i)\in Sp\{v_1,...,v_i\}$.

מסקנה:
על מנת לשלש את $T:V\to V$ יש למצוא בסיס $B=\{v_1,...,v_n\}$ של V ($n=\dim V$) כך שלכל $1\le i\le n$ קיים: $T(v_i)\in Sp\{v_1,...,v_i\}$.

משפט:
תהי $T:V\to V$ העתקה ליניארית של מרחב וקטורי מרוכב V ממימד $n\ge 1$. אזי קיים בסיס B של V שבו $[T]_B$ משולשית עליונה.
(המשפט הנ"ל נכון עבור כל שדה F סגור אלגברית, כלומר, שדה שבו לכל פולינום ממעלה 1 לפחות קיים שורש).

מסקנה:
תהי $A\in M_{nxn}(C)$ מטריצה מרוכבת. אזי קיימת מטריצה הפיכה $P\in M_{nxn}(C)$ ומטריצה משולשת עליונה $T\in M_{nxn}(C)$ כך ש: $T=P^{-1}AP$, כלומר A דומה למטריצה משולשת.

הצבה של העתקות ליניאריות ומטריצות בתוך פולינומים

הגדרה:
תהי $A\in M_{nxn}(F)$ מטריצה, ויהי $P(t)=\sum_{i=0}^{m}a_it^i\in F[t]$ פולינום, ההצבה P(A) היא: $\sum_{i=0}^{m}a_iA^i\in M_{nxn}(F)$.
כאשר $A^i=\underbrace{A\cdot...\cdot A}_{i}$ ו- $A^0=I_n$.

הגדרה:
תהי $T:V\to V$ העתקה ליניארית של מרחב וקטורי V מעל שדה F, ויהי $P(t)=\sum_{i=0}^{m}a_it^i\in F[t]$ פולינום. אזי ההצבה P(t) היא העתקה ליניארית מ-V ל-V המוגדרת ע"י: $p(T)=\sum_{i=0}^{m}a_iT^i$.
כאשר $T^i=\underbrace{T\circ...\circ T}_{i}$ ו- $T^0=I$ העתקת הזהות על V.

הגדרה:
אם $P(A)=0$ נאמר כי A מאפסת את P.

טענה:
1. $(P_1+P_2)(A)=P_1(A)+P_2(A)$

2. $(cP)(A)=c(P(A))$
3. $(P_1\cdot P_2)(A)=P_1(A)\cdot P_2(A)$

<u>מסקנה:</u>
לכל מטריצה $A\in M_{nxn}(F)$ ולכל 2 פולינומים $P_1(t),P_2(t)\in F[t]$ קיים:
$P_1(A)\cdot P_2(A)=P_2(A)\cdot P_1(A)$.

<u>טענה:</u>
אם $A=[T]_B$ אזי לכל פולינום P קיים: $[P(T)]_B=P([T]_B)$.

<u>הצבה של מטריצה אלכסונית ולכסינה</u>

<u>טענה:</u>
תהי $D=diag(\lambda_1,...,\lambda_n)\in M_{nxn}(f)$ אזי לכל פולינום $P(t)\in F[t]$ קיים:
$P(D)=diag(P(\lambda_1),...,P(\lambda_n))$.

<u>טענה:</u>
תהי $A\in M_{nxn}(F)$ נניח כי קיימת מטריצה אלכסונית $D\in M_{nxn}(F)$ ומטריצה הפיכה $Q\in M_{nxn}(F)$ כך ש: $D=Q^{-1}AQ$. אזי לכל פולינום $P(t)\in F[t]$ קיים:
$P(A)=QP(D)Q^{-1}$.

<u>מסקנה:</u>
נניח כי המטריצות $A,D,Q\in M_{nxn}(F)$ מקיימות: $D=diag(\lambda_1,...,\lambda_n)$, Q הפיכה, $D=Q^{-1}AQ$. אזי לכל פולינום $P(t)\in F[t]$ קיים: $P(A)=Qdiag(P(\lambda_1),...,P(\lambda_n))Q^{-1}$.

<u>משפט קיילי המילטון</u>

<u>מטרה:</u>
בהינתן מטריצה A (או העתקה ליניארית T), למצוא פולינום P ממעלה קטנה ככל האפשר כך ש: $P(A)=0$ (או $P(T)=0$).

<u>טענה:</u>
תהי $A\in M_{nxn}(F)$ מטריצה. אזי קיים פולינום $P(t)\in F[t]$ ממעלה לכל היותר n^2 כך ש:
$P(A)=0$.

<u>משפט קיילי המילטון:</u>
תהי $A\in M_{nxn}(F)$, נסמן ב $P_A(t)\in F[t]$ את הפולינום האופייני של A, אזי: $P_A(A)=0$.
(כל מטריצה מאפסת את הפולינום האופייני שלה).

<u>מטריצה צמודה</u>

<u>הגדרה:</u>

בהינתן $A \in M_{nxn}(F)$, המטריצה הצמודה $adj(A)$ מוגדרת באופן הבא:

$[adj(A)]_{i,j} = (-1)^{i+j} M_{j,i}$ כאשר $M_{j,i}$ היא הדטרמיננטה של המטריצה המתקבלת מ-A ע"י מחיקה של השורה ה-j ית והעמודה ה-i ית.

<u>התכונה הבסיסית של המטריצה הצמודה:</u>

$A \cdot adj(A) = adj(A) \cdot A = \det A \cdot I$

<u>משפט קיילי המילטון להעתקות ליניאריות</u>

<u>משפט:</u>

תהי $T: V \to V$ העתקה ליניארית על מרחב וקטורי מרוכב n מימדי V, אזי: $P_T(T) = 0$.

<u>שימוש במשפט קיילי המילטון</u>

<u>טענה:</u>

תהי $A \in M_{nxn}(F)$ מטריצה הפיכה אזי קיימים מקדמים $b_0, \ldots, b_{n-1} \in F$ כך ש:

$A^{-1} = \sum_{i=0}^{n-1} b_i A^i$.

<u>הפולינום המינימלי</u>

<u>מטרה:</u>

בהינתן מטריצה $A \in M_{nxn}(F)$ או העתקה ליניארית $T: V \to V$, למצוא פולינום $P(t) \in F[t]$ ממעלה חיובית קטנה ככל האפשר כך ש: $P(A) = 0$ או $P(T) = 0$.

<u>משפט:</u>

תהי $A \in M_{nxn}(F)$ מטריצה אזי הקבוצה: $I(A) = \{p \in F[t] : p(A) = 0\}$ היא אידיאל ב F[t].

<u>הגדרה:</u>

תהי $A \in M_{nxn}(F)$ מטריצה. הפולינום המתוקן ממעלה חיובית מינימלית אשר מתאפס ע"י A נקרא הפולינום המינימלי של A ומסומן ב $M_A(t)$.

<u>נשים לב:</u>

לכל $A \in M_{nxn}(F)$ קיים $I(A) = < M_A(t) >$.

<u>תכונות של הפולינום המינימלי</u>

1. $I(A) = < M_A(t) >$, $P_A(t) \in I(A)$ אזי: $P_A(t)$ מתחלק ב $M_A(t)$.
2. תהי $A \in M_{nxn}(F)$ אזי $\deg M_A(t) \le n$.

<u>טענה:</u>

נניח כי המטריצה $A \in M_{nxn}(F)$ מקיימת $A^k = 0$ עבור k שלם חיובי כלשהו. אזי $A^n = 0$ (מטריצה נילפוטנטית).

הפולינום המינימאלי של מטריצות אלכסוניות ולכסינות

טענה:

תהי $D = diag(\lambda_1,...,\lambda_n) \in M_{nxn}(F)$ מטריצה אלכסונית.

$M_A(t) = (t-\lambda_{i_1})...(t-\lambda_{i_k})$

כאשר $\lambda_{i_1},...,\lambda_{i_k}$ הם כל הערכים השונים מבין $\lambda_1,...,\lambda_n$.

טענה:

תהיינה $A, B \in M_{nxn}(F)$ מטריצות דומות, אזי $I(A) = I(B)$.

מסקנה:

נניח כי מטריצה $A \in M_{nxn}(F)$ דומה למטריצה אלכסונית $D = diag(\lambda_1,...,\lambda_n)$ אזי:

$M_A(t) = M_D(t) = (t-\lambda_{i_1})...(t-\lambda_{i_k})$

כאשר $\lambda_{i_1},...,\lambda_{i_k}$ הם כל הערכים השונים מבין $\lambda_1,...,\lambda_n$.

מציאת הפולינום המינימאלי

משפט:

תהי ב מטריצה, נניח כי $\lambda \in F$ הוא ע"ע של A. אזי הפולינום המינימאלי $M_A(t)$ מתחלק ב- $(t-\lambda)$, כלומר λ הוא שורש של $M_A(t)$.

הערה:

ניתן להוכיח כי לכל מטריצה $A \in M_{nxn}(F)$, לפולינום האופייני $P_A(t)$ ולפולינום המינימאלי $M_A(t)$ יש אותם גורמים אי פריקים.

אם $P_A(t) = p_1^{s_1}(t)...p_k^{s_k}(t)$ כאשר $p_1,...,p_k$ הם גורמים אי פריקים שונים, אזי:

$M_A(t) = p_1^{r_i}...p_k^{r_k}$

כאשר $1 \le r_i \le s_i$ $1 \le i \le k$.

הפולינום המינימאלי של העתקה ליניארית

משפט:

תהי $T: V \to V$ העתקה ליניארית של מ"ו סוף מימדי V מעל שדה F, אזי קבוצת הפולינומים:

$I(T) = \{p(t) \in F(T) : p(T) = 0\}$

היא אידיאל ב- $F[T]$.

הגדרה:

תהי T כנ"ל, הפולינום המתוקן ממעלה חיובית מינימאלית אשר מתאפס ע"י T נקרא הפולינום המינימאלי של T ומסומן $M_T(t)$.

$I(T) = \langle M_T(t) \rangle$

<u>טענה:</u>
תהי T כנ"ל ותהי $A=[T]_B$ מטריצת הייצוג של T לפי בסיס כלשהו B של V, אזי $I(A)=I(T)$.

<u>מסקנה:</u>
תהיינה A,T כנ"ל אזי ל- T ול- A אותו פולינום מינימאלי.

<u>מסקנה:</u>
אם העתקה ליניארית $T:V\to V$ לכסינה, אזי הפולינום המינימאלי $M_T(t)$ מתפרק לגורמים ליניאריים שונים.

<u>משפט:</u>
תהי $T:V\to V$ העתקה ליניארית של מרחב וקטורי סוף מימדי V מעל שדה F. נניח כי הפולינום המינימאלי של T מתפרק לגורמים ליניאריים שונים:

$$M_T(t)=(t-\lambda_i)...(t-\lambda_k) \qquad \lambda_i\neq\lambda_k$$

אזי T לכסינה.

<u>צורת ז'ורדן</u>

<u>הגדרה:</u>
מטריצה $A\in M_{nxn}(F)$ נקראת נילפוטנטית מאינדקס s אם $A^s=0$ אבל $A^i\neq 0$ לכל $i<s$.

<u>הגדרה:</u>
בלוק ז'ורדן מסדר n מעל שדה F הוא מטריצה מסדר nxn עם איברים משדה F מהצורה:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

<u>סימון:</u> J_n.

<u>טענה:</u>
J_n היא נילפוטנטית מאינדקס n.

<u>טענה:</u>

$$J_n{}^k=\begin{pmatrix} \overbrace{0 \ \cdots \ 0}^{k} & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ & & & 0 \\ & & & \vdots \\ & 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

__אבחנה:__ $rank(J_n)=n-1$.

__מסקנה:__ $P_{J_n}(t)=M_{J_n}(t)=t^n$.

__הגדרה:__ יהי F שדה ויהי $\lambda\in F$. בלוק ז'ורדן מסדר n השייך לע"ע λ הוא מטריצה מסדר nxn עם איברים משדה F מהצורה:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$$

__סימון:__ $J_n(\lambda)$.

__טענה:__ $P_{J_n(\lambda)}(t)=M_{J_n(\lambda)}(t)=(t-\lambda)^n$.

__טענה:__
הע"ע היחיד של $J_n(\lambda)\in M_{nxn}(F)$ הוא $\lambda\in F$ עם ריבוי אלגברי n וריבוי גיאומטרי 1.

__טענה:__
לכל k טבעי קיים:

$$\left(J_n(\lambda)\right)^k=\sum_{i=0}^{n}\binom{k}{i}\lambda^{k-i}J_n^{\ i}$$

__הגדרה:__
יהי F שדה. מטריצה $G\in M_{nxn}(F)$ היא מטריצת ז'ורדן אם G היא מטריצת בלוקים אלכסונית שבה כל בלוק באלכסון הוא בלוק ז'ורדן.

$$G=diag\left(J_{n_1}(\lambda_1),...,J_{n_k}(\lambda_k)\right)$$

__דוגמא:__

$$G=diag\left(J_4(3),J_2(3),J_3(2),J_1(4),J_1(0)\right)$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 3 & 1 & & 0 \\ & 3 & 1 & \\ & & 3 & 1 \\ 0 & & & 3 \end{matrix}} & & & & 0 \\ & \boxed{\begin{matrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{matrix}} & & & \\ & & \boxed{\begin{matrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{matrix}} & & \\ & & & \boxed{4} & \\ 0 & & & & \boxed{0} \end{pmatrix}$$

הערות:

1. מטריצת ז'ורדן היא מטריצה משולשית עליונה.
2. אם $G = diag\left(J_{n_1}(\lambda_1),...,J_{n_k}(\lambda_k)\right)$ אזי:

$$P_G(t) = (t-\lambda_2)^{n_1}...(t-\lambda_k)^{n_k}$$

ולכן הע"ע של G הם $\lambda_1,...,\lambda_k \in F$ עם ריבויים אלגבריים $n_1,...,n_k$ בהתאמה.

3. אם $A = diag(B_1,...,B_k)$ מטריצת בלוקים אלכסונית, אזי:

$$M_A(t) = lcm\left(M_{B_1}(t),...,M_{B_k}(t)\right)$$

(lcm – המכפלה המשותפת המינימאלית).

לכן, אם $G = diag\left(J_{n_1}(\lambda_1),...,J_{n_k}(\lambda_k)\right)$ אזי:

$$M_G(t) = lcm\left((t-\lambda_1)^{n_1},...,(t-\lambda_k)^{n_k}\right)$$

בביטוי הנ"ל $(t-\lambda_i)$ מופיע בחזקה השווה לגודל בלוק ז'ורדן הגדול ביותר ב- G השייך ל- λ_i.

בדוגמא הנ"ל:

$$P_G(t) = (t-3)^6(t-2)^3(t-4)t$$
$$M_G(t) = (t-3)^4(t-2)^3(t-4)t$$

<u>טענה:</u> אם $G = diag\left(J_{n_1}(\lambda_1),...,J_{n_k}(\lambda_k)\right)$ מטריצת ז'ורדן אזי הריבוי הגיאומטרי של ע"ע λ_i שווה למספר הבלוקים השייכים ל- λ_i.

<u>הגדרה:</u>

תהי $T:V\to V$ העתקה ליניארית של מרחב וקטורי n מימדי V מעל שדה F. בסיס B של V נקרא בסיס ז'ורדן עבור T אם מטריצת הייצוג $[T]_B$ היא מטריצת ז'ורדן.

בפרט, כל בסיס מלכסן הוא בסיס ז'ורדן.

<u>טענה:</u>

תהי T כנ"ל. בסיס B של V הוא בסיס ז'ורדן אם ורק אם ניתן לחלק את B ל- k חלקים $B = B_1 \cup ... \cup B_k$ ולסדר את הוקטורים בתוך כל אחד מהחלקים $B_i = \{v_{i_1},...,v_{i_n}\}$, $|B_i| = n_i$ ולמצוא k קבועים $\lambda_1,...,\lambda_k \in F$ כך שלכל $1 \le i \le k$ קיים:

$$T(v_{i_1}) = \lambda_i v_{i_1}$$
$$T(v_{i_2}) = \lambda_i v_{i_2} + v_{i_1}$$
$$\vdots$$
$$T(v_{i_n}) = \lambda_i v_{i_{n_i}} + v_{i_{n_i-1}}$$

$$[T]_B = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda & 1 & 0 \\ & \ddots & 1 \\ 0 & & \lambda \end{matrix}} & & & & \\ & \Box & & & \\ & & \Box & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \Box \\ \underbrace{\qquad}_{B_1} & \underbrace{\quad}_{B_2} & & & \underbrace{\quad}_{B_k} \end{pmatrix}$$

משפט ז'ורדן

משפט:

תהי $T:V\to V$ העתקה ליניארית על מרחב וקטורי n מימדי V מעל $\mathbb{C}$, אזי ל- T קיים בסיס ז'ורדן B.

בנוסף, אם B_1 ו- B_2 בסיסי ז'ורדן עבור T אזי המטריצות $[T]_{B_1}$ ו- $[T]_{B_2}$ זהות עד כדי שינוי סדר הבלוקים באלכסון.

משפט למטריצות:

תהי $A\in M_{nxn}(\mathbb{C})$ מטריצה מרוכבת אזי A דומה למטריצת ז'ורדן, כלומר קיימת מטריצה הפיכה $P\in M_{nxn}(\mathbb{C})$ ומטריצת ז'ורדן $G\in M_{nxn}(\mathbb{C})$ כך ש- $G=P^{-1}AP$.

בנוסף, אם A דומה למטריצות ז'ורדן G_1 ו- G_2 אזי G_1 ו- G_2 זהות עד כדי שינוי סדר הבלוקים על האלכסון.

הערה:

למעשה, צורת ז'ורדן קיימת מעל כל שדה סגור אלגברית.

צורת ז'ורדן לא בהכרח קיימת מעל שדה $\mathbb{R}$, למשל כי לא ניתן לפרק כל פולינום ממשי לגורמים ליניאריים.

משפט:

תהי $T:V\to V$ העתקה ליניארית של מרחב n מימדי ממשי V. נניח כי הפולינום האופייני של T מתפרק לגורמים ליניאריים:

$$P_T(t)=(t-\lambda_1)^{s_1}...(t-\lambda_k)^{s_k}$$

אזי ל- T קיים בסיס ז'ורדן (+ יחידות, בדומה ל- $\mathbb{C}$).

דוגמאות של שימוש במשפט ז'ורדן

משפט:

תהי $A\in M_{nxn}(\mathbb{C})$ מטריצה מרוכבת, אזי A דומה ל- A^t.

מרחבי מכפלה פנימית

הגדרה של מרחב מכפלה פנימית ממשי

הגדרה:

יהי V מ"ו. נניח כי נתונה פונקציה $f:VxV\to R$.

נסמן: $f(u,v)=(u,v)$.

f היא מכפלה פנימית על V אם קיים:

1. סימטריות: לכל $u,v\in V$ קיים: $(u,v)=(v,u)$.
2. ליניאריות: לכל $u_1,u_2,v\in V$ קיים: $(u_1+u_2,v)=(u_1,v)+(u_2,v)$.
3. הומוגניות: לכל $u,v\in V$ ולכל $\lambda\in\mathbb{R}$ קיים: $(\lambda u,v)=\lambda(u,v)$.
4. חיוביות: לכל $u\in V$ קיים: $(u,u)\geq 0$ ו- $(u,u)=0\Leftrightarrow u=0$.

הגדרה:

$$\left.\begin{aligned} a&=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\\ b&=(\beta_1,\dots,\beta_n)\end{aligned}\right\}\in V=\mathbb{R}^n$$

$$(a,b)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\beta_i$$

המכפלה הפנימית הנ"ל נקראת המכפלה הפנימית הסטנדרטית.

אי שוויון קושי שוורץ

משפט:

יהי V מרחב מכפלה פנימית אזי לכל $a,b\in V$ קיים:

$$(a,b)\leq\sqrt{(a,a)}\cdot\sqrt{(b,b)}$$

מסקנה:

לכל $\alpha_1,\dots,\alpha_n,\beta_1,\dots,\beta_n$ קיים:

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\beta_i\leq\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\beta_i^2}$$

הגדרת מכפלה פנימית מרוכבת

הגדרה:

יהי V מ"ו מרוכב. נניח כי נתונה פונקציה $f:VxV\to\mathbb{C}$, נסמן $f(u,v)=(u,v)$, f היא מכפלה פנימית על V אם f מקיימת:

1. הרמטיות (Hermit): לכל $u,v\in V$ קיים: $(u,v)=\overline{(v,u)}$.
2. ליניאריות: לכל $u_1,u_2,v\in V$ קיים: $(u_1+u_2,v)=(u_1,v)+(u_2,v)$.
3. הומוגניות: לכל $u,v\in V$ ולכל $\lambda\in\mathbb{R}$ קיים: $(\lambda u,v)=\lambda(u,v)$.
4. חיוביות: לכל $u\in V$, (u,u) הוא מספר ממשי אי שלילי ו- $(u,u)=0\Leftrightarrow u=0$.

מסקנה:

לכל $u,v\in V$ ולכל $\lambda\in\mathbb{C}$ קיים:

$$(u,\lambda v)=\bar{\lambda}(u,v)$$

נורמה (אורך) של וקטור

הגדרה:
יהי V מרחב מכפלה פנימית. הנורמה של וקטור $v \in V$, המסומנת ב- $\|v\|$ היא:

$$\|v\| = \sqrt{(v,v)}$$

אי שוויון קנטור שוורץ:

$$(a,b) \le \sqrt{(a,a)} \cdot \sqrt{(b,b)}$$
$$\Updownarrow$$
$$(a,b) \le \|a\| \cdot \|b\|$$

תכונות של נורמה

1. ליניאריות: לכל $v \in V$ ולכל סקלר λ קיים: $\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$.
2. חיוביות: לכל $v \in V$, $\|v\| \ge 0$ ו- $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$.
3. אי שוויון המשולש: $\|u+v\| \le \|u\| + \|v\|$.

מרחק במרחב מכפלה פנימית

הגדרה:
יהי V ממ"פ, יהיו $x, y \in V$. המרחק בין x ל- y המסומן $d(x,y)$ הוא:

$$d(x,y) = \|x-y\|$$

תכונות של מרחק:
1. סימטריות: לכל $x, y \in V$ מתקיים $d(x,y) = d(y,x)$.
2. חיוביות: לכל $x, y \in V$ מתקיים: $d(x,y) \ge 0$ ו- $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
3. אי שוויון משולש: לכל $x, y \in V$ קיים: $d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y)$.

מכפלה פנימית

נירמול: V ממ"פ. $0 \ne v \in V$.
נגדיר $u = \frac{v}{\|v\|}$ ואז:

$$\|u\| = \left\| \frac{v}{\|v\|} \right\| = \frac{1}{\|v\|} \|v\| = 1$$

אורתוגונאליות

הגדרה:
יהי V ממ"פ. וקטורים $u, v \in V$ נקראים ניצבים (אורתוגונאליים) אם $(u,v) = 0$.

טענה:
אם u, v וקטורים ניצבים בממ"פ V אזי:

$$\|u+v\|=\|u-v\|$$

טענה (משפט פיתגורס):
אם u,v וקטורים ניצבים בממ"פ V, אזי:

$$\|u+v\|^2=\|u\|^2+\|v\|^2$$

משלים אורתוגונאלי

הגדרה:
יהי V ממ"פ, תהי $K\subseteq V$ קבוצת וקטורים ויהי $v\in V$ וקטור. נאמר כי v ניצב ל- K אם $(v,u)=0$ לכל $u\in K$.

סימון: $v\perp K$.

הגדרה:
תהי K קבוצת וקטורים בממ"פ V. המשלים האורתוגונאלי של K המסומן ב- $K^{\perp}$ הוא הקבוצה:

$$K^{\perp}=\{v\in V: v\perp K\}$$

תכונותיו של המשלים האורתוגונאלי

משפט:
יהי ב ממ"פ. תהי $0\neq K\subseteq V$ קבוצת וקטורים, אזי:
1. $K^{\perp}$ הוא תת מרחב של V.
2. $K\cap K^{\perp}\supseteq\{0\}$. ובפרט אם K תת מרחב אזי: $K\cap K^{\perp}=\{0\}$.
3. $(K^{\perp})^{\perp}\supseteq K$.

קבוצות אורתוגונאליות ואורתונורמליות

הגדרה:
יהי V ממ"פ. קבוצה $K\subseteq V$ נקראת אורתוגונאלית אם:
1. $0\notin K$.
2. לכל $u\neq v\in K$ קיים $(u,v)=0$.

הגדרה:
K נקראת קבוצה אורתונורמלית אם:
1. K אורתוגונאלית.
2. לכל $v\in K$, $\|v\|=1$.

משפט: תהי K קבוצה אורתוגונאלית בממ"פ V, אזי K בת"ל.

בסיסים אורתוגונאליים ואורתונורמליים

הגדרה:
יהי V ממ"פ n מימדי $(n\geq 1)$.
קבוצה B של n וקטורים נקראת בסיס אורתוגונאלי אם B אורתוגונאלית (ולכן B בסיס).

קבוצה B נקראת בסיס אורתונורמלי אם היא אורתונורמלית (ואז הוא גם בסיס).

<u>משפט:</u>
תהי K קבוצה אורתוגונאלית סופית במרחב מכפלה פנימית V. אזי K בסיס אורתוגונאלי אם ורק אם K היא קבוצה אורתוגונאלית מקסימאלית לפי הכלה. כלומר, לכל $v \in V - K$ הקבוצה $K' = K \cup \{v\}$ היא לא אורתוגונאלית.

<u>מסקנה:</u>
לכל ממ"פ V ממימד $n \geq 1$ קיים בסיס אורתוגונאלי ולכן גם בסיס אורתונורמלי.

תכונות של בסיס אורתונורמלי

<u>משפט:</u>
יהי $B = \{v_1, ..., v_n\}$ בסיס אורתונורמלי של ממ"פ V, אזי:

1. לכל $u \in V$ קיים: $u = \sum_{i=1}^{n} (u, v_i) v_i$.
2. לכל $u, w \in V$ קיים: $(u, w) = \sum_{i=1}^{n} (u, v_i) \overline{(w, v_i)}$.
3. לכל $u \in V$ קיים: $\|u\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \|u, v_i\|^2}$.

היטל אורתוגונאלי

<u>משפט:</u>
יהי U תת מרחב סוף מימדי במרחב מכפלה פנימית V.
יהי $v \in V - U$ וקטור, אזי:

1. קיים וקטור $u_0 \in U$ כך ש- $v - u_0 \perp U$.
2. וקטור כנ"ל הוא יחיד (u_0).
3. לכל $u_0 \neq u_1 \in U$ קיים: $\|v - u_0\| < \|v - u_1\|$.

<u>הגדרה:</u>
יהי U תת מרחב סוף מימדי של ממ"פ V. וקטור $u_0 \in U$ נקרא ההיטל האורתוגונאלי של v על U אם $v - u_0 \perp U$.

לפי המשפט ההיטל האורתוגונאלי קיים, והוא יחיד, והוא מקיים: $\|v - u_0\| < \|v - u_1\|$ לכל $u_0 \neq u_1 \in U$ (כלומר, u_0 הוא הווקטור הקרוב ביותר ל- v מבין הוקטורים של U).

<u>חישוב ההיטל:</u>
$v \in V$.
U - תת מרחב סוף מימדי.
נבחר בסיס אורתונורמלי $B = \{w_1, ..., w_k\}$ של U, ואז:
ההיטל נתון ע"י הנוסחא הבאה:

$$u_0 = \sum_{i=1}^{k} (v, w_i) w_i$$

הערה:
אם $v \in U$ אזי ההיטל של v על U הוא v עצמו.

משפט הפירוק האורתוגונאלי

משפט:
יהי V מרחב מכפלה פנימית סול מימדי.
יהי Uתת מרחב של V.
נסמן ב- $U^{\perp}$ את המשלים האורתוגונאלי ל- U (כלומר, $U^{\perp} = \{v \in V : v \perp U\}$), אזי:
1. $V = U \oplus U^{\perp}$.
2. $(U^{\perp})^{\perp} = U$.

מסקנה:
אם U הוא תת מרחב k מימדי של ממ"פ V n מימדי, אזי: $\dim U^{\perp} = n-k$.

הטלה אורתוגונלית

הגדרה:
יהי U תת מרחב סוף מימדי של מרחב מכפלה פנימית V. אזי לפי המשפט הקודם, קיים: $V = U \oplus U^{\perp}$. לכן, לכל $v \in V$ קיימים $u \in U, w \in U^{\perp}$ יחידים כך ש: $v = u + w$.
נגדיר הטלה אורתוגונאלית $P_U : V \to V$ באופן הבא:
אם v, u, w כנ"ל, אזי: $P_U(v) = u$.

ניתן להגדיר הטלה P_U באופן הבא: נקבע בסיס אורתונורמלי $B = \{w_1, ..., w_k\}$ ל- U ואז:
$$P_U(v) = \sum_{i=1}^{k} (v, w_i) w_i$$

הערה:
אם P_U הטלה אורתוגונאלית, אזי: $P_U^{\,2} = P_U$.

תהליך גרם-שמידט (Gram-Shmidt)

מטרה:
נתון בסיס $B = \{v_1, ..., v_k\}$ של תת מרחב U בממ"פ V, לבנות בסיס אורתונורמלי B^* על U בהסתמך על וקטורי בסיס B.

משפט:
יהי $B = \{v_1, ..., v_n\}$ בסיס סדור של מרחב מכפלה פנימית V, אז קיים בסיס אורתונורמלי סדור $B^* = \{u_1^*, ..., u_n^*\}$, כך שלכל $1 \le k \le n$ קיים: $Sp\{v_1, ..., v_k\} = Sp\{u_1^*, ..., u_k^*\}$.

הערה:
ניתן להפעיל את תהליך גרם שמידט גם על בסיס B של תת מרחב U.

טענה:

יהי V ממ"פ.

1. יהיו $v,w\in V$. אם $(v,u)=(w,u)$ לכל $u\in V$ אזי $v=w$.
2. תהיינה $S,T:V\to V$ העתקות (לאו דווקא ליניאריות), אם לכל $u,v\in V$ קיים: $(u,Sv)=(u,Tv)$ אזי $S=T$.
3. אם לכל $u,v\in V$ קיים: $(Su,v)=0$ אזי $S=0$.

העתקות במרחב מכפלה פנימית

אחת המטרות:

להוכיח כי כל מטריצה סימטרית ממשית לכסינה.

מטריצה סימטרית $\leftrightarrow$ העתקה ליניארית שפועלת במרחב מכפלה פנימית.

הגדרת העתקה צמודה

משפט:

תהי $T:V\to V$ העתקה ליניארית של ממ"פ V ממימד $n\geq 1$. אזי:

1. קיימת העתקה $T^*:V\to V$ אזר מקיימת: $(Tu,v)=(u,T^*v)$ לכל $u,v\in V$.
2. ההעתקה הנ"ל יחידה.
3. ההעתקה הנ"ל היא העתקה ליניארית.

הגדרה:

תהי $T:V\to V$ ה"ל בממ"פ ממימד $n\geq 1$, ההעתקה הליניארית היחידה $T^*:V\to V$ המקיימת $(Tu,v)=(u,T^*v)$ נקראת ההעתקה הצמודה ל- T.

הערה:

ניתן להגדיר העתקה צמודה T^* באופן הבא:

נקבע בסיס אורתונורמלי $B=\{w_1,...,w_k\}$ של V ואז לכל $v\in V$:

$$T^*v=\sum_{i=1}^{n}(v,Tw_i)w_i$$

תזכורת:

מטריצה צמודה (Adjoint) A^*.

$A^*=\overline{A^t}$ (המקרה המרוכב)

$A^*=A^t$ (המקרה הממשי)

ולכן: $[T^*]_E=([T]_E)^*$.

הערה:

תהי $P_U:V\to V$ ההטלה האורתוגונאלית על U אזי $P_U^*=P_U$, כלומר, P_U צמודה לעצמה.

תכונות של ההעתקה הצמודה

משפט:

1. $(T^*)^*=T$

2. $(S+T)^* = S^* + T^*$
3. $(\alpha T)^* = \bar{\alpha} T^*$
4. $I^* = I, 0^* = 0$
5. $(S \cdot T)^* = T^* S^*$
6. $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$

משפט:

תהי $T: V \to V$ העתקה ליניארית של ממ"פ V ממימד $n \geq 1$, ויהי B בסיס אורתונורמלי של V אזי:

1. $[T^*]_B = ([T]_B)^*$
2. אם ה"ל $S: V \to V$ מקיימת: $[S]_B = ([T]_B)^*$ אזי $S = T^*$.

$$\begin{array}{ccc} T & \leftrightarrow & T^* \\ \downarrow & & \downarrow \\ [T]_B & \leftrightarrow & [T^*]_B \end{array}$$

ייצוג לפי בסיס אורתונורמלי

העתקות צמודות לעצמן

הגדרה:

העתקה ליניארית $T: V \to V$ נקראת צמודה לעצמה אם $T^* = T$.

משפט:

תהי $T: V \to V$ העתקה ליניארית בממ"פ V ממימד $n \geq 1$. T צמודה לעצמה אם ורק אם בכל בסיס אורתונורמלי B של V קיים: $[T]_B = [T^*]_B$, כלומר, מטריצת הייצוג $[T]_B$ צמודה לעצמה.

למה:

תהי $T: V \to V$ העתקה צמודה לעצמה של ממ"פ סוף מימדי V. נניח כי לכל $u \in V$ קיים: $(Tu, u) = 0$ אזי $T = 0$.

טענה:

תהי $T: V \to V$ ה"ל של ממ"פ מרוכב V.

נניח כי לכל $u \in V$ קיים: $(Tu, u) = 0$ אזי $T = 0$.

הערה: הטענה הנ"ל אינה נכונה במקרה הממשי.

משפט:

תהי $T: V \to V$ העתקה ליניארית במרחב מכפלה פנימית V סוף מימדי מרוכב. אזי T צמודה לעצמה אם ורק אם לכל $u \in V$ מתקיים (Tu, u) הוא מספר ממשי, כלומר

$\operatorname{Im}(Tu, u) = 0$.

העתקות אוניטריות

הגדרה:

יהי V ממ"פ סוף מימדי. העתקה ליניארית $T:V\to V$ נקראת אוניטרית אם $TT^*=T^*T=I$, כאשר I היא העתקת הזהות על V.

משפט:

תהי $T:V\to V$ ט"ל של ממ"פ סוף מימדי V אזי התנאים הבאים שקולים:

1. T אוניטרית, כלומר $TT^*=T^*T=I$.
2. לכל $u,v\in V$ מתקיים $(Tu,Tv)=(u,v)$ (T משמרת מכפלה פנימית).
3. לכל $u\in V$ מתקיים $\|Tu\|=\|u\|$ (T משמרת נורמה).

מטריצות אוניטריות

הגדרה:

מטריצה $A\in M_{nxn}(\mathbb{C})$ נקראת אוניטרית אם מתקיים: $AA^*=A^*A=I_n$ כאשר $A^*=\overline{A^t}$.

הגדרה:

מטריצה $A\in M_{nxn}(\mathbb{R})$ נקראת אורתוגונאלית אם מתקיים $AA^t=A^tA=I_n$.

משפט:

תהי $T:V\to V$ ט"ל של ממ"פ סוף מימדי V.

1. אם T אוניטרית, אזי לכל בסיס אורתונורמלי B של V מטריצת הייצוג $[T]_B$ היא אוניטרית.
2. אם B בסיס אורתונורמלי של V ומטריצת הייצוג $[T]_B$ היא אוניטרית, אזי T אוניטרית.

משפט:

1. תהי $A\in M_{nxn}(\mathbb{C})$ ($A\in M_{nxn}(\mathbb{R})$) מטריצה אוניטרית (אורתוגונאלית) אזי השורות של A הן בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{C}^n$ ($\mathbb{R}^n$), וכנ"ל גם לעמודות.
2. אם השורות של A הן בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{C}^n$ ($\mathbb{R}^n$) אזי A אוניטרית (אורתוגונאלית), כנ"ל לגבי העמודות.

הערכים העצמיים של העתקות במרחבי מכפלה פנימית

משפט:

תהי $T:V\to V$ העתקה צמודה לעצמה של ממ"פ סוף מימדי V. יהי λ ע"ע של T, אזי λ הוא ממשי.

משפט:

תהי $T:V\to V$ העתקה צמודה לעצמה של ממ"פ סוף מימדי V. אזי הפולינום האופייני $P_T(t)$ מתפרק לגורמים ליניאריים מעל $\mathbb{R}$, כלומר:

$$P_T(t)=(t-\lambda_1)...(t-\lambda_n) \qquad \lambda_1,...,\lambda_n\in\mathbb{R}$$

מסקנה:

1. כל ע"ע של מטריצה צמודה לעצמה הוא ממשי.

2. הפולינום האופייני של מטריצה צמודה לעצמה (מרוכבת או ממשית) מתפרק לגורמים ליניאריים ממשיים.

הע"ע של העתקות אוניטריות

משפט:
תהי $T:V\to V$ העתקה אוניטרית של ממ"פ סוף מימדי V. יהי λ ע"ע של T, אזי $|\lambda|=1$, ולכן בפרט אם V ממשי $\lambda\in\{\pm1\}$.

הערה:
לא לכל העתקה אורתוגונאלית יש ערך עצמי, ולכן לא כל העתקה אורתוגונאלית לכסינה.

לכסון אוניטרי

הגדרה:
ט"ל $T:V\to V$ לכסינה אוניטרית אם קיים בסיס אורתונורמלי B של V שבו $[T]_B$ אלכסונית.

הגדרה:
מטריצה $A\in M_{nxn}(\mathbb{C})$ לכסינה אוניטרית אם קיימת מטריצה אוניטרית $Q\in M_{nxn}(\mathbb{C})$ כך ש: $Q^{-1}AQ=Q^{*}AQ$ היא מטריצה אלכסונית.

מההגדרה נובע:
1. A לכסינה אוניטרית אם ורק אם קיים בסיס אורתונורמלי B של $\mathbb{C}^n$ המורכב מוקטורים עצמיים של A.
2. T לכסינה אוניטרית אם ורק אם קיים בסיס אורתונורמלי B של V שבו מטריצת הייצוג $[T]_B$ היא אלכסונית.

קשר בין העתקות למטריצות

משפט:
1. תהי $T:V\to V$ העתקה ליניארית בממ"פ סוף מימדי V, ויהי B בסיס אורתונורמלי של V. אם T לכסינה אוניטרית אזי גם מטריצת הייצוג $[T]_B$ לכסינה אוניטרית.
2. יהיו B,T,V כנ"ל. אם מטריצת הייצוג $[T]_B$ לכסינה אוניטרית אזי גם T לכסינה אוניטרית.

למה:
1. יהיו B_1,B_2 בסיסים אורתונורמליים של ממ"פ סוף מימדי V. תהי Q מטריצת המעבר מ- B_1 ל- B_2, אזי Q אוניטרית.
2. יהי B_1 בסיס אורתונורמלי של ממ"פ n-מימדי V. ותהי $Q\in M_{nxn}$ מטריצה אוניטרית.
נסתכל על Q כעל מטריצת המעבר מ- B_1 אל בסיס חדש B_2 אזי גם B_2 הוא בסיס אורתונורמלי.

המטרה:
לאפיין העתקות/מטריצות לכסינות אוניטריות.

תנאי הכרחי:
אם T לכסינה (אוניטרית) אזי הפולינום האופייני של T מתפרק לגורמים ליניאריים.

תנאי הכרחי שני:
משפט:
תהי $T:V\to V$ לכסינה אוניטרית, אזי קיים: $TT^*=T^*T$.
מתקיים עבור העתקות צמודות לעצמן והעתקות אוניטריות.

הגדרה:
העתקה ליניארית $T:V\to V$ של ממ"פ סוף מימדי V נקראת נורמאלית אם קיים:
$TT^*=T^*T$.

הגדרה מקבילה למטריצות:
מטריצה $A\in M_{nxn}(\mathbb{C})$ נקראת נורמאלית אם קיים $AA^*=A^*A$ ($A^*=\overline{A^t}$).

נשים לב:
העתקה/מטריצה צמודה לעצמה או אוניטרית היא העתקה/מטריצה נורמאלית.

משפט:
תהי $T:V\to V$ העתקה נורמאלית בממ"פ סוף מימדי V. נניח כי הפולינום האופייני $P_T(t)$ מתפרק לגורמים ליניאריים, אזי T לכסינה אוניטרית.

מסקנה:
1. כל העתקה ליניארית צמודה לעצמה לכסינה אוניטרית.
(הסבר: הוכחנו כי הפולינום האופייני על ה"ל צמודה לעצמה מתפרק לגורמים ליניאריים).
2. במקרה המרוכב: נורמאליות $\Leftrightarrow$ קיום ליכסון אוניטרי.

למה:
תהי $T:V\to V$ העתקה ליניארית בממ"פ סוף מימדי V.
נניח כי $P_T(t)$ מתפרק לגורמים ליניאריים.
אזי קיים בסיס אורתונורמלי B^* של V שבו מטריצת הייצוג $[T]_B^*$ היא משולשית עליונה.

למה:
תהי $T:V\to V$ העתקה נורמאילת, יהי B בסיס אורתונורמלי של V אזי מטריצת הייצוג $[T]_B$ היא מטריצה נורמאלית.

למה:
תהי $A\in M_{nxn}(\mathbb{C})$ מטריצה משולשית עליונה נורמאלית, אזי A אלכסונית.

משפט מקביל למטריצות:
תהי $A\in M_{nxn}(\mathbb{C})$ מטריצה נורמאלית (כלומר, $AA^*=A^*A$).
נניח כי הפולינום האופייני $P_A(t)$ מתפרק לגורמים ליניאריים. אזי A לכסינה אוניטרית.

<u>מציאת בסיס אורתונורמלי מלכסן</u>

<u>משפט:</u>
תהי $T:V\to V$ העתקה נורמאלית, יהיו $\lambda_1\neq\lambda_2$ ע"ע של T, ויהיו $v_1,v_2\in V$ ו"ע מתאימים,
אזי $\left(v_1,v_2\right)=0$.

<u>אלגוריתם ללכסון אוניטרי</u>
נתון: העתקה ליניארית T (מטריצה A).

1. מצא את הפולינום האופייני $P_T(t)$ ($P_A(t)$).
2. פרק את $P_T(t)$ ($P_A(t)$) לגורמים ליניאריים.

$$P_T(t)=\left(t-\lambda_1\right)^{s_1}\ldots\left(t-\lambda_k\right)^{s_k} \qquad \lambda_i\neq\lambda_j$$

אם $P_T(t)$ ($P_A(t)$) אינו מתפרק לגורמים ליניאריים – עצור, T (A) אינה לכסינה אוניטרית.

3. עבור $1\le i\le k$, נסמן:

$$V_{\lambda_i}=\left\{v\in V: Tv=\lambda_i v\right\} \qquad \left(V_{\lambda_i}=\left\{v\in V: Av=\lambda_i v\right\}\right)$$

מצא בסיס אורתונורמלי B_i לתת מרחב V_{λ_i} (למשל לפי גרם-שמידט).

4. נסמן: $B=\bigcup_{i=1}^{k}B_i$, ואז B בסיס אורתונורמלי ו-

$$[T]_B=\begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_1\end{matrix}}_{S_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \underbrace{\begin{matrix}\lambda_k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda k\end{matrix}}_{S_k}\end{pmatrix}$$

(למטריצות נרשום את וקטורי B כעמודות של מטריצה Q, ואז Q היא מטריצה אוניטרית ו-

$$(Q^{-1}AQ=Q^{*}AQ=\begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_1\end{matrix}}_{S_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \underbrace{\begin{matrix}\lambda_k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda k\end{matrix}}_{S_k}\end{pmatrix}$$

<u>סיכום ביניים:</u>
$T:V\to V$ העתקה נורמאלית.

$P_T(t)=(t-\lambda_1)^{s_1}\dots(t-\lambda_k)^{s_k}$

נסמן ב- V_{λ_i} את התת מרחב העצמי של ע"ע λ_i $1\le i\le k$.

אזי:

1. $V=V_{\lambda_1}\oplus\dots\oplus V_{\lambda_k}$.
2. לכל $1\le i\ne j\le k$ קיים $V_{\lambda_i}\perp V_{\lambda_j}$.

המשפט הספקטראלי

משפט:

תהי $T:V\to V$ העתקה נורמאלית של ממ"פ n מימדי V, $n\ge 1$.
נניח כי הפולינום האופייני $P_T(t)$ מתפרק לגורמים ליניאריים:

$P_T(t)=(t-\lambda_1)^{s_1}\dots(t-\lambda_k)^{s_k}$

לכל $1\le i\le k$ יהי V_{λ_i} התת מרחב העצמי השייך לע"ע λ_i.

לכל $1\le i\le k$ תהי $P_i:V\to V$ ההטלה האורתנורמלית על V_{λ_i} אזי:

1. $T=\lambda_1P_1+\dots+\lambda_kP_k$.
2. $P_1+\dots+P_k=I$.
3. לכל $1\le i\ne j\le k$ קיים $P_i\cdot P_j=0$.

העתקות אורתוגונאליות (ממשיות)

משפט:

יהי V ממ"פ ממשי ממימד $n\ge 1$. תהי $T:V\to V$ העתקה אורתוגונאלית, אז קיים פירוק:
$V=V_1\oplus\dots\oplus V_k$
כאשר $\dim V_i=1$ או $\dim V_i=2$, V_i הוא T-שמור (אינוראינטי) (כלומר $T_{V_i}\subseteq V_i$) ו-
$V_i\perp V_j$ עבור $1\le i\ne j\le k$.

מסקנה:

יהי $V=V_1\oplus\dots\oplus V_k$ כנ"ל. נבחר בסיס אורתונורמלי B_i בכל אחד מ- V_i, $1\le i\le k$, ונסמן:

$$B=\bigcup_{i=1}^{k}B_i$$

אזי B הוא בסיס אורתונורמלי של V, ו-

$$[T]_B=\begin{pmatrix}\boxed{M_1} & & & 0\\ & \boxed{M_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{M_k}\end{pmatrix}$$

כאשר $M_i\in M_{m_i x m_i}(\mathbb{R})$, $m_i=\dim V_i$ ($\Leftarrow$ $m_i=1$ או $m_i=2$).
ו- $M_i=[T_{V_i}]_{B_i}$ (הייצוג של הצימצום של T על V_i בבסיס B_i) היא מטריצה אורתוגונאלית.

סיכום:

אם $A\in M_{2x2}(\mathbb{R})$ אורתוגונאלית, אז:

1. $\det A=-1$ ואז A היא מטריצת הייצוג של שיקוף עם ע"ע $-1,1$ ו- A לכסינה.
2. $\det A=1$, ואז A מטריצת הייצוג של הסיבוב בזווית φ נגד כיוון השעון. ו- A לא לכסינה אלא אם כן $\varphi=\pi k$ $A=0,\pm1,\pm2$.

תבניות בילינאריות וריבועיות

תבניות בילינאריות

הגדרה:

יהי V מ"ו מעל שדה F. פונקציה $f:V\times V\to F$ נקראת תבנית בילינארית אם:

1. לכל $v_1,v_2,u\in V$ קיים: $f(v_1+v_2,u)=f(v_1,u)+f(v_2,u)$.
2. לכל $v,u\in V$ ולכל $\lambda\in F$ קיים: $f(\lambda v,u)=\lambda f(v,u)$.

ליניאריות בארגומנט ראשון

3. לכל $v,u_1,u_2\in V$ קיים: $f(v,u_1+u_2)=f(v,u_1)+f(v,u_2)$.
4. לכל $v,u\in V$ ולכל $\lambda\in F$ קיים: $f(v,\lambda u)=\lambda f(v,u)$.

ליניאריות בארגומנט שני

הערה:

הבדלים בין תבנית בילינארית לבין מכפלה פנימית:

במכפלה פנימית בנוסף דורשים:

1. סימטריות.
2. חיוביות.

המטריצה של תבניות בילינאריות

הגדרה:

תהי $f:V\times V\to F$ תבנית בילינארית על מרחב וקטורי סוף מימדי V, יהי $B=\{v_1,\dots,v_n\}$ בסיס סדור של V.

מטריצה $A\in M_{n\times n}(F)$ $(\dim V=n)$ נקראת מטריצת הייצוג של f בבסיס B אם:

$$f(v_i,v_j)=[A]_{ij}=a_{ij}$$

סימון:

$[f]_B$ - מטריצת הייצוג של f לפי B.

טענה:

תהי $A\in M_{n\times n}(F)$ מטריצת הייצוג של תבנית בילינארית $f:V\times V\to F$ בבסיס $B=\{v_1,\dots,v_n\}$.

אזי לכל $u,v\in V$ קיים:

$$f(u,v)=([u]_B)^t A[v]_B$$

תבניות בילינאריות סימטריות

הגדרה:

תבנית בילינארית $f:V\times V\to F$ נקראת סימטרית אם $f(u,v)=f(v,u)$ לכל $u,v\in V$.

משפט:
תהי $f: V \times V \to F$ תבנית בילינארית על מרחב וקטורי V ממימד $n \geq 1$ מעל שדה F.
אזי:
1. אם f סימטרית אזי לכל בסיס B של V מטריצת הייצוג $[f]_B$ גם היא סימטרית.
כלומר: $[f]_B^t = [f]_B$.
2. אם בבסיס B של V, מטריצת הייצוג $[f]_B$ היא סימטרית אזי גם f סימטרית.

תבניות ריבועיות

הגדרה:
תהי $f: V \times V \to F$ תבנית בילינארית הפועלת על מרחב וקטורי V מעל שדה F. פונקציה $q: V \to F$ המוגדרת ע"י $q(v) = f(v,v)$ נקראת התבנית הריבועית הקשורה ל- f.

תזכורת:
יהי F שדה, מספר שלם חיובי קטן ביותר n עבורו $\underbrace{1+\ldots+1}_{n} = 0$ נקרא המציין של F

ומסומן ב- $char(F)$.
אם n כזה לא קיים אז נגדיר $char(F) = 0$.

נניח בהמשך:
המציין של שדה F מקיים $charF \neq 2$.

טענה:
לכל תבנית ריבועית $q: V \to F$ מתאימה תבנית בילינארית סימטרית $f: V \times V \to F$ אחת לכל היותר.

טענה:
תהי $q: V \to F$ תבנית ריבועית, אזי קיימת תבנית בילינארית סימטרית $f: V \times V \to F$ כך ש: $q(v) = f(v,v)$ לכל $v \in V$.

מסקנה:
קיימת התאמה חח"ע ועל בין תבניות בילינאריות סימטריות לבין תבניות ריבועיות.

הגדרה:
תהי $q: V \to F$ תבנית ריבועית הפועלת על מרחב וקטורי V ממימד $n \geq 1$. יהי $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ בסיס סדור של V. נסמן ב- $f: V \times V \to F$ את התבנית הבילינארית הסימטרית היחידה עבורה $q(v) = f(v,v)$ לכל $v \in V$. אזי מטריצת הייצוג של q לפי בסיס B המסומנת ב- $[q]_B$ היא מטריצת הייצוג $[f]_B$.
$[q]_B = [f]_B$

מסקנה:
לכל $q: V \to F$ ולכל בסיס B של V המטריצה $[q]_B$ היא סימטרית, כלומר,
$([q]_B)^t = [q]_B$.

תזכורת על מטריצת המעבר

הגדרה:

$B_1=\{v_1,...,v_n\}$, $B_n=\{u_1,...,u_n\}$ בסיסים של מ"ו V.

מטריצת המעבר M מבסיס B_1 אל בסיס B_2 מוגדרת ע"י:

$$M=\begin{pmatrix} | & & | \\ [u_1]_B & \cdots & [u_n]_B \\ | & & | \end{pmatrix}_{n\times n}$$

שימוש במטריצת המעבר:

אם $v\in V$ אזי קיים:

$$[v]_{B_1}=M[v]_{B_2}$$

שינוי בסיס

משפט:

תהי $f:V\times V\to F$ תבנית בילינארית הפועלת על מרחב וקטורי V ממימד $n\geq 1$. יהיו B',B בסיסים סדורים של V. תהי $M\in M_{n\times n}(F)$ מטריצת המעבר בין B ל- B'. אזי קיים:

$$[f]_{B'}=M^t[f]_B M$$

משפט:

תהי $q:V\to F$ תבנית ריבועית הפועלת על מ"ו n מימדי V, $n\geq 1$. יהיו B',B בסיסים סדורים של V, נסמן ב- $M\in M_{n\times n}(F)$ את מטריצת המעבר מ B ל- B', אזי קיים:

$$[q]_{B'}=M^t[q]_B M$$

בהעתקות ליניאריות:

$T:V\to V$, B,B' בסיסים של V. M מטריצת המעבר מ- B אל B'.

$$[T]_{B'}=M^{-1}[T]_B M$$

ולכן $[T]_{B'}$ דומה ל- $[T]_B$.

מטריצות חופפות

הגדרה:

מטריצות $A,B\in M_{n\times n}(F)$ נקראות חופפות אם קיימת מטריצה הפיכה $Q\in M_{n\times n}(F)$ כך ש:

$$B=Q^t AQ$$

משפט:

יחס החפיפה הוא יחס שקילות.

מסקנה:

יחס החפיפה מגדיר את החלוקה של המטריצות למחלקות שקילות.

משפט:

מטריצות A,B חפיפות אם ורק אם הן מייצגות אותה תבנית בילינארית.

<u>טענה:</u>

אם A, B חפיפות אזי: $rank(A) = rank(B)$.

<u>הגדרה:</u>

תהי $f: V \times V \to F$ תבנית ביליניארית הפועלת על מ"ו V ממימד $n \geq 1$. הדרגה של f המסומנת ב- $rank(F)$ היא הדרגה של מטריצת הייצוג של f לפי בסיס כלשהו B של V.

הגדרה דומה גם לתבנית ריבועית.

<u>לכסון של תבניות</u>

<u>המטרה:</u>

בהינתן תבנית ביליניארית $f: V \times V \to F$ לנסות למצוא בסיס B של V בו מטריצת הייצוג $[f]_B$ היא מטריצה אלכסונית.

<u>טענה:</u>

אם תבנית ביליניארית $f: V \times V \to F$ לכסינה אז f סימטרית.

<u>משפט:</u>

תהי $f: V \times V \to F$ תבנית ביליניארית סימטרית הפועלת על מ"ו V ממימד $n \geq 1$. נניח כי $Char(F) \neq 2$, אזי f לכסינה, כלומר קיים בסיס סדור $B = \{v_1, ..., v_n\}$ של V שבו מטריצת הייצוג $[f]_B$ היא אלכסונית.

<u>משפט מקביל לתבניות ריבועיות:</u>

יהי V כנ"ל, תהי $q: V \to F$ תבנית ריבועית אזי q לכסינה, כלומר קיים בסיס סדור B של V שבו $[q]_B$ היא מטריצה אלכסונית.

<u>משפט למטריצות:</u>

יהי F שדה עם $Char(F) \neq 2$, תהי $A \in M_{n \times n}(F)$ מטריצה סימטרית, אזי A חופפת למטריצה אלכסונית, כלומר קיימת מטריצה הפיכה $M \in M_{n \times n}(F)$ כך שהמטריצה $D = M^t AM$ היא אלכסונית.

<u>משפט:</u>

יהי V מ"ו ממימד $n \geq 1$ מעל $\mathbb{C}$, תהי $q: V \to F$ תבנית ריבועית, אזי קיים בסיס B^* של V שבו מטריצת הייצוג $[q]_{B^*}$ היא אלכסונית שבה אברי האלכסון הם 0 או 1, כאשר מספר ה-1 באלכסון שווה לדרגה של q.

<u>מסקנה:</u>

כל מטריצה מרוכבת סימטרית $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ חופפת למטריצה יחידה אלכסונית מהצורה:

$$D=\begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{matrix}}_{r} & 0 \\ 0 & \begin{matrix}0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0\end{matrix} \end{pmatrix}$$

כאשר $r=rank(A)$.

<u>משפט:</u>
יהי V מ"ו n מימדי $(n\geq 1)$ מעל שדה $\mathbb{R}$.
תהי $q:V\to F$ תבנית ריבועית על V, אזי קיים בסיס B^* של V שבו מטריצת הייצוג $[q]_{B^*}$ היא אלכסונית עם $0,-1,+1$ באלכסון, כאשר מספר ה-1 יחד עם מספר ה- -1 שווה לדרגה של q.

<u>מסקנה:</u>
כל מטריצה ריבועית $A\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ סימטרית חופפת למטריצה אלכסונית עם $0,\pm 1$ באלכסון.

<u>משפט ההתמדה של סילבסטר</u>

<u>משפט:</u>
יהי V מ"ן וקטורי ממימד $n\geq 1$ מעל $\mathbb{R}$ ותהי $q:V\to R$ תבנית ריבועית, אזי מספר האיברים החיוביים ומספר האיברים השליליים בכל מטריצת ייצוג אלכסונית של q נקבע חד משמעית ע"י q.

<u>מסקנה:</u>
מספר האיברים החיוביים ומספר האיברים השליליים בכל צורה אלכסונית של q הוא לא תלוי בבחירת בסיס ולכן הם אינוריאנטים של q.

<u>מסקנה:</u>
כל מטריצה A סימטרית ממשית חופפת למטריצה יחידה מהצורה:

$$D=diag\left(\underbrace{1,\dots,1}_{\pi(A)},\underbrace{-1,\dots,-1}_{r-\pi(A)},\underbrace{0,\dots,0}_{n-r}\right)$$

כאשר $r=rank(A)$.

<u>סימן של תבניות ריבועית</u>

<u>הגדרה:</u>
תבנית ממשית $q:V\to R$ נקראת:
1. חיובית (לחלוטין) אם $q(v)>0$ לכל $0\neq v\in V$.
2. חיובית למחצה אם $q(v)\geq 0$ לכל $v\in V$.

3. שלילית (לחלוטין) אם $q(v)<0$ לכל $0\neq v\in V$.
4. שלילית למחצה אם $q(v)\leq 0$ לכל $v\in V$.

יהי π מספר האיברים החיוביים בצורה אלכסונית של q.
יהי $r-\pi$ מספר האיברים השליליים בצורה אלכסונית של q.
אזי:
חיובית לחלוטין $\Leftrightarrow$ $\pi=n$
חיובית למחצה $\Leftrightarrow$ $\pi=r$
שלילית לחלוטין $\Leftrightarrow$ $\pi=0$, $r=n$
שלילית למחצה $\Leftrightarrow$ $\pi=0$

<u>הגדרה:</u>
מטריצה חיובית סימטרית $A\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ נקראת:
1. חיובית לחלוטין אם $v^tAv>0$ לכל $0\neq v\in V$.
2. חיובית למחצה אם $v^tAv\geq 0$ לכל $v\in V$.
3. שלילית לחלוטין אם $v^tAv<0$ לכל $0\neq v\in V$.
4. שלילית למחצה אם $v^tAv\leq 0$ לכל $v\in V$.

<u>משפט:</u>
תהי $A\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ מטריצה ממשית סימטרית. יהיו $\lambda_1,...,\lambda_n\in\mathbb{R}$ הע"ע של A, אזי:
1. A חיובית $\Leftrightarrow$ $\lambda_i>0$ לכל $1\leq i\leq n$.
2. A חיובית למחצה $\Leftrightarrow$ $\lambda_i\geq 0$ לכל $1\leq i\leq n$.
3. A שלילית $\Leftrightarrow$ $\lambda_i<0$ לכל $1\leq i\leq n$.
4. A שלילית למחצה $\Leftrightarrow$ $\lambda_i\leq 0$ לכל $1\leq i\leq n$.

<u>ניתן להוכיח:</u>
A הנ"ל חיובית לחלוטין אם ורק אם התבנית הריבועית $q:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י: $q(v)=v^tAv$ היא חיובית לחלוטין.

<u>שיטת הלכסון של יעקובי (Jacobi)</u>

נניח: V מרחב וקטורי n מימדי $(n\geq 1)$ מעל שדה F, $Char(F)\neq 2$. $q:V\to F$ תבנית ריבועית. $f:V\times V\to F$ התבנית הבילינארית הסימטרית המתאימה ל-q, כלומר $q(v)=f(v,v)$ לכל $v\in V$.
יהי $B=\{u_1,...,u_n\}$ בסיס של V. נסמן ב- $A=(a_{ij})$ את מטריצת הייצוג של q לפי B:
$A=[q]_B$.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f(u_1,u_1) & \cdots & f(u_1,u_n) \\ \vdots & & \vdots \\ f(u_n,u_1) & \cdots & f(u_n,u_n) \end{pmatrix}$$

נניח:

$$\left.\begin{array}{l}\Delta_1 = |a_{11}| \neq 0 \\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0 \\ \vdots \\ \Delta_{n-1} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix} \neq 0 \\ \Delta_n = |A| \neq 0 \end{array}\right\} \text{המינורים הראשיים של } A$$

נחפש בסיס מלכסן $B = \{w_1, ..., w_n\}$ מהצורה הבאה:

$$\begin{aligned} w_1 &= \lambda_{11} u_1 \\ w_2 &= \lambda_{21} u_1 + \lambda_{22} u_2 \\ &\vdots \\ w_{n-1} &= \lambda_{n-1,1} u_1 + ... + \lambda_{n-1,n-1} u_{n-1} \\ w_n &= \lambda_{n,1} u_1 + ... + \lambda_{n,n} u_n \end{aligned}$$

$$w_i = Sp\{u_1, ..., u_i\} \qquad 1 \leq i \leq n$$

נרצה לקיים את שתי הדרישות הבאות:

1. לכל $1 \leq i \leq n$ ולכל $1 \leq j < i$ קיים: $f(w_i, u_j) = 0$.
2. לכל $1 \leq i \leq n$ קיים: $f(w_i, u_i) = 1$.

<u>טענה:</u>
אם $w_1, ..., w_n$ מקיימים דרישה 1 אזי $f(w_i, w_j) = 0$ לכל $1 \leq j < i \leq n$.

לכן, אם נצליח למצוא וקטורים $w_1, ..., w_n$ המקיימים את הדרישות הנ"ל, ונוכיח כי $B' = \{w_1, ..., w_n\}$ הוא בסיס של V, נקבל אז כי $[f]_{B'} = [q]_{B'}$ היא מטריצה אלכסונית, ולכן B' יהיה בסיס מלכסן.

נתבונן בוקטור $w_i = \lambda_{i1} u_1 + ... + \lambda_{ii} u_i$.

$$f\left(u_j,\sum_{i=1}^{j}\lambda_{ik}u_k\right)=f\left(u_j,w_i\right)=f\left(w_i,u_j\right)=0$$

$$\Downarrow$$

$$\lambda_{i1}f\left(u_j,u_1\right)+\lambda_{i2}f\left(u_j,u_2\right)+...+\lambda_{ij}f\left(u_j,u_i\right)=0$$

$$\Downarrow$$

$$\lambda_{i1}a_{j1}+\lambda_{i2}a_{j2}+...+\lambda_{ii}a_{ji}=0 \qquad 1\le j<i$$

$$\Downarrow$$

$$f\left(u_i,\sum_{k=1}^{i}\lambda_{ik}u_k\right)=f\left(u_i,w_i\right)=f\left(w_i,u_i\right)=1$$

$$\Downarrow$$

$$\lambda_{i1}f\left(u_i,u_1\right)+...+\lambda_{ii}f\left(u_i,u_i\right)=1$$

$$\Downarrow$$

$$\lambda_{i1}a_{i1}+...+\lambda_{ii}a_{ii}=1$$

קיבלנו: מערכת של i משוואות ליניארית עם i משתנים:

$$\begin{aligned}&a_{11}\lambda_{i1}+a_{12}\lambda_{i2}+...+a_{1i}\lambda_{ii}=0\\&\vdots\\&a_{i-1,1}\lambda_{i1}+a_{i-1,2}\lambda_{i2}+...+a_{i-1,i}\lambda_{ii}=0\\&a_{i1}\lambda_{i1}+a_{i2}\lambda_{i2}+...+a_{ii}\lambda_{ii}=1\end{aligned}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1i}\\\vdots&&\vdots\\a_{i1}&\cdots&a_{ii}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_{i1}\\\vdots\\\lambda_{ii}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix} \qquad *$$

נשים לב כי הדטרמיננטה של מטריצת המקדמים המצומצמת היא:

$$\begin{vmatrix}a_{11}&&a_{1i}\\&&\\a_{i1}&&a_{ii}\end{vmatrix}=\Delta_i\neq 0$$

לכן למערכת * קיים פיתרון והוא יחיד, בפרט ע"י שימוש בנוסחת קרמר מקבלים:

$$\lambda_{ii}=\frac{\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1,i-1}&0\\\vdots&&\vdots&\\a_{i1}&\dots&a_{i,i-1}&1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1i}\\\vdots&&\vdots\\a_{i1}&\dots&a_{ii}\end{vmatrix}}$$

<u>תזכורת:</u>

כלל קרמר לפתרון מערכת משוואות של n משוואות עם n משתנים:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+...+a_{1n}x_n=b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1+...+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

נניח כי:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

אזי למערכת קיים פיתרון יחיד הנתון ע"י:

$$x_i=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}$$

לכן:

$$\lambda_{ii}=\frac{(-1)^{i+1}-1\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,i-1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,i-1} \end{vmatrix}}{\Delta_i}=\frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i}$$

מכאן:

$$\lambda_{ii}=\frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i}\neq 0$$

חישבנו: $f\left(w_i,w_j\right)=0$ לכל $1\le i\neq j\le n$, כמו כן:

$$f\left(w_i,w_j\right)=f\left(w_i,\sum_{j=1}^{i}\lambda_{ij}u_j\right)=\sum_{i=1}^{i}\lambda_{ij}f\left(w_i,w_j\right)=\lambda_{ii}f\left(w_i,u_i\right)=\lambda_{ii}\cdot 1=\lambda_{ii}=\frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i}$$

לכן: אם נוכיח כי $B'=\left\{w_1,...,w_n\right\}$ בסיס, נקבל:

$$[q]_{B'}=[f]_{B'}=\begin{pmatrix} \lambda_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\Delta_1} & & & 0 \\ & \frac{\Delta_1}{\Delta_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} \end{pmatrix}$$

<u>טענה:</u>

הקבוצה $B'=\left\{w_1,...,w_n\right\}$ היא בסיס של V.

הוכחנו: $B'=\left\{w_1,...,w_n\right\}$ הוא בסיס של V, ו-

$$[f]_{B'}=[q]_{B'}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\Delta_1} & & & 0 \\ & \frac{\Delta_1}{\Delta_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} \end{pmatrix}$$

נניח:

$$[v]_{B'}=\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

ואז:

$$q(v)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i}{y_i}^2$$

$$\lambda_{11}a_{11}=\lambda_1 f\left(u_1,u_1\right)=f\left(\lambda_{11}u_1,u_1\right)=1\Leftarrow\begin{cases} w_1=\lambda_{11}w_i \\ f\left(w_1,u_1\right)=1 \\ f\left(u_1,u_1\right)=a_{11} \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\lambda_{11}=\frac{1}{a_{11}}=\frac{\Delta_0}{\Delta_1}$$

הוכחנו את המשפט הבא:

<u>משפט:</u>
יהי V מ"ו n מימדי $(n\geq 1)$ מעל שדה F, כאשר $Char(F)\neq 2$. תהי $q:V\rightarrow F$ תבנית ריבועית. נניח כי בבסיס $B=\left\{u_1,...,u_n\right\}$ מטריצת הייצוג $A=[q]_B$ מקיימת:

$$\Delta_1=\left|a_{11}\right|\neq 0$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\neq 0$$

$$\vdots$$

$$\Delta_{n-1}=\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix}\neq 0$$

$$\Delta_n=\left|A\right|\neq 0$$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

נסמן: $\Delta_0=1$ אז קיים בסיס B' של V שבו מטריצת הייצוג $[q]_{B'}$ היא:

$$[q]_{B'} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\Delta_1} & & & 0 \\ & \frac{\Delta_1}{\Delta_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} \end{pmatrix}$$

<u>מסקנה:</u>

תהי $q:V \to F$ תבנית ריבועית הפועלת על מרחב וקטורי V ממימד n $(n \geq 1)$ מעל שדה F.

q חיובית לחלוטין אם ורק אם בכל בסיס $B = \{u_1, ..., u_n\}$ של V מטריצת הייצוג $A = [q]_B$ מקיימת:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\Delta_1 = |a_{11}| > 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0$$

$$\vdots$$

$$\Delta_n = |A| > 0$$