חשבון אינפיניטיסמלי 1

www.sikumuna.co.il

האינטגרל המסויים

✓ תהי f פונקציה המוגדרת בקטע [a,b] נאמר ש- f אינטגרבילית בקטע [a,b] אם: $\lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x^*_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$ כאשר בחישוב הגודל הנ"ל עוברים על כל החלוקות האפשריות של הקטע [a,b] ועל כל הסדרות האפשריות של נקודת ביניים x^*_i. הגבול הנ"ל נקרא האינטגרל המסויים של f בקטע [a,b], a ו- b נקראים גבולות האינטגרציה.

משפטים לגבי האינטגרל המסויים:

1. אם f אינטגרבילית בקטע [a,b] אז f חסומה בו.
2. אם לפונקציה חסומה f המוגדרת בקטע [a,b] יש מספר סופי של נקודות אי רציפות אז f אינטגרבילית בקטע.
3. אם f ,g פונקציות אינטגרביליות בקטע [a,b] ואם f(x)=g(x) לכל x בקטע למעט אולי מספר סופי של נקודות אז $\int_a^b g(x)dx = \int_a^b f(x)dx$
4. תכונת הלינאריות: אם f ,g פונקציות אינטגרביליות בקטע [a,b] אז לכל $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ גם הפונקציה $\alpha f + \beta g$ אינטגרביליות בקטע [a,b].
$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$$
5. תכונת האדיטיביות: אם a, b, c נקודות בקטע סגור I שבו הפונקציה f היא אינטגרבילית אז
$$a < b < c \qquad \int_a^c f(x) = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$
6. תכונת המונטוניות: אם f ,g פונקציות אינטגרביליות בקטע [a,b] ואם $f(x) \le g(x)$ לכל $a \le x \le b$ אז $\int_a^b f(x) \le \int_a^b g(x)dx$

משפט ניטון – לייבניץ:

✓ אם f פונקציה רציפה בקטע [a,b] ואם F פונקציה קדימה אז $\int_a^b f(x) = F(b) - F(a)$

משפט היסודי II של החדו"א:

✓ f רציפה בקטע I $a \in I$ נגדיר $F(x) = \int_a^x f(t)dt \quad \Leftarrow \quad F'(x) = f(x)$

חשבון אינפיניטיסמלי 1

www.sikumuna.co.il

משפט הערך הממוצע לאינטגרלים:

✓ אם f פונקציה בקטע [a,b] אז $\int_a^b f(x) = f(c)(b-a)$ קימיית נקודה $c \in [a,b]$ כך ש-

$$\frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x) = f(c)$$

✓ אם f אינטגרבילית בקטע [a,b] המספר $\frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x) = f(c)$ נקרא הערך הממוצע של f בקטע [a,b] מסמנים אותו fave.

חישובי שטחים, נפחים ואורך קשת

✓ f,g אינטגרביליות בקטע I ואם $x_1.........x_n$ הן כל הפתרונות של המשוואה $f(x)-g(x)=0$ בקטע I, אז השטח הכלוא בין 2 העקומות בשטח זה הוא:

$$\left|\int_a^{x_1}(f(x)-g(x))dx\right| + ... + \left|\int_{x_n}^{b}(f(x)-g(x))dx\right|$$

✓ נגדיר $A(x)$ שטח החתך הניצב לציר x (למישור xy), נפח = $\int_a^b A(x)dx$

✓ תהי f פונקציה חלקה ב- [a,b]. אורך הקשת L של העקומה $y=f(x)$, מ- $x=a$ ל- $x=b$ מוגדר:

$$L = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}dx = \int_a^b \sqrt{1+(\tfrac{dy}{dx})^2}dx$$

סדרות

✓ סדרה מתכנסת:

1. נאמר שסדרה $(a_n)_n$ היא סדרה מתכנסת אם קיים מספר ממשי L כך שלכל איברי הסדרה קרובים כרצונינו ל- L עבור n מספיק גדול. $\lim_{n\to\infty}(a_n) = L$
2. נאמר שלסדרה $(a_n)_n$ יש גבול L אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים מספר טבעי N_ε כך שלכל $n \geq N_\varepsilon$ מתקיים $|a_n - L| < \varepsilon$

✓ סדרה מתבדרת:

אם איברי הסדרה $(a_n)_n$ גדולים כרצונינו עבור n מספיק גדול נאמר שהסדרה שואפת לאינסוף,

$$\lim_{n\to\infty}(a_n) = \infty$$

חשבון אינפיניטסימלי 1

www.sikumuna.co.il

- ✓ סדרות חסומות:

סדרה $(a_n)_n$ נקראת חסומה אם קיימים מספרים m,M כך ש- $m \le a_n \le M$ לכל $n \in \mathbb{N}$. בדרה חסומה אינה בהכרח גם סדרה מתכנסת.

- ✓ סדרות מונטניות:

סדרה $(a_n)_n$ נקראת מונוטנית עולה אם לכל $n \in \mathbb{N}$ תקיים $a_n \le a_{n+1}$.

סדרה $(a_n)_n$ נקראת מונוטנית יורדת אם לכל $n \in \mathbb{N}$ תקיים $a_n \ge a_{n+1}$.

- ✓ כל סדרה מונוטנית וחסומה היא סדרה מתכנסת.

- ✓ לכל סדרה מונוטנית יש גבול סופי או אינסופי אם:
  1. אם הסדרה חסומה אז היא מתכנסת לגבול סופי.
  2. אם הסדרה אינה חסומה מלעיל אז היא שואפת לאינסוף חיובי.
  3. אם הסדרה אינה חסומה מלרע אז היא שואפת לאינסוף שלילי.

- ✓ משפט הסנדויץ לסדרות:

אם $(a_n)_n, (b_n)_n, (c_n)_n$ הן סדרות המקיימות $a_n \le b_n \le c_n$ לכל $n \ge n_0$ ואם הסדרות $(a_n)_n$ ו- $(c_n)_n$ מתכנסות לאותו L אז גם $(b_n)_n$ מתכנסת, $\lim_{n\to\infty}(b_n) = L$

טורים אינסופים

הגדרות ומשפטי בסיס:

טור אינסופי הוא ביטוי מהצורה $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ כאשר $(a_k)_k$ סדרה של מספרים ממשיים.

בהינתן טור אינסופי $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ מסמנים את הסכום החלקי ה-n של הטור כך $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$.

נאמר שהטור $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ **מתכנס אם** סדרת הסכומים החלקיים שלו $(S_n)_{n\ge1}$ היא סדרה **מתכנסת** במקרה זה, אם: $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, המספר S נקרא סכום הטור $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

אם סדרת הסכומים החלקים $(S_n)_{n\ge1}$ **מתבדרת** נאמר שהסכום $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ מתבדר ואין לו סכום סופי.

טור $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ נקרא חיובי אם $a_k > 0$ לכל k. טור חיובי מתכנס אם ורק אם סדרת הסכומים החלקיים שלו **חסומה.**

חשבון אינפיניטיסמלי 1
www.sikumuna.co.il

__טור גיאומטרי:__

$$aq^0+aq^1+aq^2+aq^3+.....+aq^n\,,\qquad a\neq 0$$

טור גיאומטרי מתכנס אם $|q|<1$, ומתבדר $|q|\geq 1$. אם הטור מתכנס, סכומו הוא $\sum_{k=0}^{\infty}aq^k=\frac{a}{1-q}$.

__מבחן האינטגרל להתכנסות טורים חיוביים__

נניח ש-f הפונקציה חיובית, יורדת ורציפה בקטע $[1,\infty)$ אז הטור $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ והאינטגרל $\int_1^{\infty}f(x)dx$

מתכנסיים שניהם או מתבדרים שניהם.

הטור $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\alpha}}$ מתכנס אם $\alpha>1$ ומתבדר אם $\alpha\leq 1$.

__תנאי הכרחי להתכנסות טורים__

אם $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ מתכנס אז הסדרה $(a_k)_k$ שואפת לאפס, $\lim_{k\to\infty}a_k=0$. לכן אם הסדרה לא שואפת לאפס

הטור מתבדר. (אם סדרה שואפת לאפס לא בהכרח הטור מתכנס. דוגמא $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$)

__מבחן ההשוואה לטורים חיוביים__

נניח ש- $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ ו- $\sum_{k=1}^{\infty}b_k$ הם טורים חיוביים כך ש- $a_k\leq b_k$ לכל $k\geq 1$ או החל ממקום מסויים, אז:

1. אם $\sum_{k=1}^{\infty}b_k$ מתכנס אז $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ מתכנס.
2. אם $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ מתבדר אז $\sum_{k=1}^{\infty}b_k$ מתבדר.

__מבחן המנה להתכנסות טורים חיוביים__

נניח כי $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ הוא טור חיובי ו- $\lim_{k\to\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k}=L$ אז:

1. אם $L<1$ הטור מתכנס.
2. אם $L>1$ אז הטור מתבדר.
3. אם $L=1$ הטור יכול להתכנס והוא יכול להתבדר.

__פעולות אם טורים מתכנסים__

נניח ש- $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ ו- $\sum_{k=1}^{\infty}b_k$ הם טורים מתכנסים אז:

1. $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k+b_k)$ מתכנס.

2. $\sum_{k=1}^{\infty} C \bullet a_k$ מתכנס.