

# חשבון אינפיניטיסמלי 1

www.sikumuna.co.il

## ערך מוחלט

$$|a| = \begin{cases} a & a \geq 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}$$

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

$$|-a| = |a|$$

$$|ab| = |a||b|$$

$$\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$$

$$|a^n| = |a|^n$$

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

## גבולות

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

חיבור חיסור

$$\lim_{x \rightarrow a} (c \cdot f(x)) = c \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

כפל בסקלר

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

כפל פונקציות

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$$

בתנאי ש-  $g(x)$  שונה מ-0 בסביבה של  $a$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^n = (\lim_{x \rightarrow a} f(x))^n$$

$n$  טבעי

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$$

$n$  טבעי וכאשר  $n$  זוגי אי שלילי בסביבות הנק'  $a$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \infty$$

$a > 1$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = 0$$

$0 < a < 1$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \infty$$

# חשבון אינפיניטיסמלי 1

www.sikumuna.co.il

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

מקרים של " $x \rightarrow \infty$ " או " $x \rightarrow -\infty$ ":

1. להוציא את החזקה הגבוהה, בנפרד במונה ובמכנה במקרה של מנה.
2. כדי להפטר משורשים – כפל בצמוד.
3. בפולינום או פונ' רציונלית מטפלים ע"י הצבה ישירה.

ערך הביניים:

לכל ערך  $y$  המצא בין  $f(a)$  ל-  $f(b)$  קיים  $c$  בקטע  $(a,b)$  כך ש-  $y=f(c)$ . (בתנאי כי  $f$  רציפה בקטע).

סנדוויץ':

$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$  ומתקיים עבור כל  $x$  בקטע:  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$  אז  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$

## חוקי לוגריתמים

$$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

$$\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$$

$$\log_a (b^k) = k \log_a b$$

$$\log_a x = \frac{\log_c x}{\log_c a} = \frac{\ln x}{\ln a}$$

# חשבון אינפיניטסימלי 1

www.sikumuna.co.il

## נגזרות

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(f(a) + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

$$(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a)$$

$$(cf)'(a) = c \cdot f'(a)$$

$$(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a)g'(a)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$$

קירוב לינארי

משוואת המשיק לגרף כאשר  $f$  גזירה ב-  $a$

$f \pm g$  גזירה ב-  $a$

לכל  $c$  קבוע הפונקציה  $cf$  גזירה ב-  $a$

$fg$  גזירה ב-  $a$

$\frac{f}{g}$  גזירה ב-  $a$  ומתקיים  $g(a) \neq 0$

אם  $f(a) = c$  אז  $(c)' = 0$ .

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(ctgx)' = \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\operatorname{arc cot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctag} x = \operatorname{arc cot} x$$

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$$

מורכבות: אם  $g(x)$  גזירה ב-  $b=f(a)$  ואם  $f(x)$  גזירה ב-  $a$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

# חשבון אינפיניטיסמלי 1

www.sikumuna.co.il

## משפטים כלליים

משפט פרמה:

אם  $a$  נקודת קיצון מקומי של  $f$  ואם  $f$  גזירה בנק'  $a$  אז מובטח ש-  $f'(a)=0$  (מסקנה): בנקודת מקסימום או מינימום ייתכנו שני מצבים בלבד: או ש-  $f'(a)=0$  או שאינה קיימת.

משפט וירשטראס:

אם  $f$  פונקציה רציפה בקטע  $[a,b]$  אז  $f$  מקבלת את המינימום והמקסימום המוחלט בתוך הקטע

משפט רול:

אם  $f$  פונקציה רציפה ב-  $[a,b]$  וגזירה ב-  $(a,b)$  ואם  $f(a)=f(b)$  אז קיימת נקודה  $c \in (a,b)$  כך ש-  $f'(c)=0$  (מסקנה): הצגה מספרית:  $f(b) = 0 \leq f'(c) = 0 \leq f(a) = 0$

משפט הערך הממוצע (Lagrange):

אם  $f$  פונקציה רציפה בקטע  $[a,b]$  וגזירה ב-  $(a,b)$  אז קיימת נקודה  $c \in (a,b)$  כך ש-

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

משפט הערך הממוצע של קושי:

אם  $f$  ו-  $g$  פונקציות רציפות בקטע  $[a,b]$  וגזירות בקטע  $(a,b)$  כך ש-  $g'(x) \neq 0$  ב-  $(a,b)$  אז קיימת

$$\text{נקודה: } \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

כללי לופיטל למקרה "0/0"

נניח ש-  $f, g$  פונקציות שמוגדרות וגזירות בסביבת הנקודה  $a$  (למעט אולי  $a$  עצמה) כך ש-  $g'(x) \neq 0$

בסביבה זו. ונניח ש-  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$  וגם  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ , נניח בנוסף ש-  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ , אז גם-

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

כללי לופיטל למקרה " $\frac{\infty}{\infty}$ " או " $\frac{-\infty}{-\infty}$ "

נניח ש-  $f, g$  פונקציות שמוגדרות וגזירות בסביבת הנקודה  $a$  (למעט אולי  $a$  עצמה) כך ש-  $g'(x) \neq 0$

בסביבה זו. ונניח ש-  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$  וגם  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ , נניח בנוסף ש-  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ , אז גם-

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

# חשבון אינפיניטיסמלי 1

[www.sikumuna.co.il](http://www.sikumuna.co.il)

## זהויות טריגונומטריות

זהויות פיתגורס:

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$$

$$1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta$$

זהויות סימון:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta$$

נוסחאות סכום:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \beta \sin \alpha$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

נסחאות זוויות כפולה:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

נסחאות חצי-זווית:

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$$

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

# חשבון אינפיניטיסמלי 1

[www.sikumuna.co.il](http://www.sikumuna.co.il)

## חקירת פונקציות

עליה וירידה:

אם  $f$  גזירה בקטע  $I$  ואם  $f'(x) > 0$  לכל  $x \in I$  אז  $f$  עולה

אם  $f$  גזירה בקטע  $I$  ואם  $f'(x) < 0$  לכל  $x \in I$  אז  $f$  יורדת

נקודות קריטיות, קיצון, מקסימום ומינימום:

אם  $c$  נקודה קריטית של הפונקציה  $f$  ואם  $f'$  משנה סימן ב-  $c$  אז  $c$  נק' קיצון.  
אם  $f''$  משנה סימן בנקודה  $c$  אז  $c$  נק' פיתול. הנקודה  $c$  היא בעצם נקודה קריטית (בדרך כלל) של  $f'$  (כולמר  $f''$  לא קיימת או שווה 0).

נניח ש- $f$  גזירה בטע המכיל את את הנקודה  $c$  ונניח ש-  $c$  נקודה קריטית ולכן  $f'(c) = 0$ :

1.  $f$  גזירה פעמיים בנקודה  $c$  ואם  $f''(c) > 0$  אז  $c$  נק' מינימום מקומי של  $f$ .
2.  $f$  גזירה פעמיים בנקודה  $c$  ואם  $f''(c) < 0$  אז  $c$  נק' מקסימום מקומי של  $f$ .

אסימפטוטות:

אם  $f$  מוגדרת ב-  $(a, \infty)$  ואם  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$  אז הישר  $y=b$  נקרא אסימפטוטה אופקית ב-  $\infty$ .

אם  $f$  מוגדרת ב-  $(-\infty, a)$  ואם  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$  אז הישר  $y=b$  נקרא אסימפטוטה אופקית ב-  $-\infty$ .

הישר  $y=ax+b$  נקרא אסימפטוטה משופעת אם ב-  $\infty$   $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax - b) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) = b, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a \quad (\text{הגדרה דומה ב- } -\infty)$$

# חשבון אינפיניטיסמלי 1

www.sikumuna.co.il

## אינטגרציה

אינטגרלים כללים:

$$\int af(x)dx = a \int f(x)dx$$
$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$
$$\int u'vdx = uv - \int uv'$$

- ✓ כפול בצמוד
- ✓ להוסיף אחד או להוריד אחד
- ✓ להכפיל באחד
- ✓ לפרק לשמרים
- ✓ לעביר לביטוי טריגונומטרי אחר
- ✓ לנסות להגיע לכלל נסיגה.

אינטגרלים של פונקציות טריגונומטריות:

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{cot} x + C$$
$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$
$$\int \cos x dx = \sin x$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$$
$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$$

$$\int \frac{1}{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C$$

$$\int \frac{1}{\cos x} dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\sin x}{1-\sin x} \right| + C$$

אינטגרלים של פונקציות לגריתמיות:

$$\int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a} + C$$

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a+x^2}} dx = \ln |x + \sqrt{a+x^2}| + C$$