חדו"א 2

סיכום התרגולים של ד"ר סרגיי קוסטיוקובסקי

עורך: אודי רובינשטיין
http://www.cs.tau.ac.il/~ehudrubi

עודכן בתאריך: 30/08/2004

אינטגרלים בסיסיים:

$\int e^x dx$	$e^x + c$
$\int a^x$	$\frac{a^x}{\ln a} + c$
$\int \sin x$	$-\cos x + c$
$\int \cos x$	$\sin x + c$
$\int \frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x + c$
$\int \frac{1}{x^2 + 1}$	$\operatorname{arctg} x + c$
$\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$	$\arcsin x + c$
$\int \ln x$	$x \ln x - x + c$
$\int \frac{1}{x^2 + a^2}$	$\frac{1}{a} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right) + c$

<u>טענה:</u>

$$\lim\left(\sum f(x_i)\Delta x_i\right) = \int_a^b f(x)dx$$

<u>הגדרה:</u> פונקציה $F(x)$ נקראת קדומה של $f(x)$ בקטע I אם $F'(x) = f(x)$ לכל $x \in I$.

<u>הגדרה:</u> האינטגרל הלא מסוים של $f(x)$ (ב- I) זה אוסף של פונקציות קדומות של f (ב- I) - $\int f(x)dx$.

<u>טענה:</u> אם F_1, F_2 קדומות של f אז $F_1 - F_2 \equiv const$.

<u>משפט:</u> אם f רציפה ב- I אז יש לה קדומות ב- I.

<u>טענה:</u> אם f, g אינטגרביליות ב- I אזי גם $f \pm g, \alpha f$ אינטגרביליות ב- I, ומתקיים:

$$\int \alpha f = \alpha \int f$$

$$\int (f \pm g) = \int f \pm \int g$$

<u>טענה:</u>

$$\int f(x) = F(x) + c \Rightarrow \int f(x + \alpha) = F(x + a) + c$$

$$\int f(x) = F(x) + c \Rightarrow \int f(ax) = \frac{F(ax)}{a} + c$$

$$\int f(x) = F(x) + c \Rightarrow \int f(ax + b) = \frac{F(ax + b)}{a} + c$$

נוסחת האינטגרציה בחלקים:

$$\int uv' = uv - \int u'v$$

שיטת החלפת משתנים/הצבה:

$$\int f(x)dx = \left[x = x(t)\right] = \int f\left(x(t)\right)\cdot x'(t)dt$$

בכיוון ההפוך:

$$\int f(x)dx = \begin{bmatrix} x = x(t) \\ x' = x'(t) \end{bmatrix} = \int f\left(x(t)\right)\cdot x'(t)dt$$

החלפות אוילר:

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$$

כאשר R הוא אוסף כל הפונקציות שניתן להרכיב עם 2 המשתנים (חיבור, כפל וכו').

$a > 0$	$\sqrt{ax^2+bx+c} = \mathrm{t} - \sqrt{a}x$
$c > 0$	$\sqrt{ax^2+bx+c} = xt + \sqrt{c}$
אם יש שני שורשים ממשיים שונים x_1, x_2	$\sqrt{ax^2+bx+c} = (x-x_1)\sqrt{a}\sqrt{\frac{x-x_2}{x-x_1}}$

החלפה טריגונומטרית אוניברסלית:

$$\int R(\sin x, \cos x)dx$$

$$t = \mathrm{tg}\frac{x}{2} \qquad -\pi < x < \pi \qquad \Rightarrow x = 2\,\mathrm{arctg}\,t \Rightarrow x' = \frac{2}{1+t^2}$$

$$\sin x = \frac{2\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

אינטגרל מסוים:

$$R_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i \xrightarrow[\max \Delta x_i \to 0]{} \int_a^b f(x)dx$$

משפט: אם f רציפה ב $[a,b]$ אזי f אינטגרבילית.

משפט: פונקציה מונוטונית וחסומה היא אינאגרבילית.

משפט: אם לפונקציה יש מספר סופי או בן מניה של נקודות אי רציפות אזי היא אינטגרבילית.

משפט: יהיו f, g אינטגרביליות ב $[a,b]$, אזי:

$$\int_a^b kf = k\int_a^b f$$

$$\int_a^b (f \pm g) = \int_a^b f \pm \int_a^b g$$

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

$$f \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f \geq 0$$

$$\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$$

$$\int_a^b f = -\int_b^a f$$

<u>סכומי דרבו:</u>

$$S = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$

$$s = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$$

$$M_i = \sup_{\Delta x_i} f$$

$$m_i = \inf_{\Delta x_i} f$$

<u>קריטריון אינטגרביליות:</u> f חסומה על קטע $[a,b]$, f אינטגרבילית בקטע אם ורק אם לכל $\varepsilon > 0$ קיימת חלוקה של $[a,b]$ כך ש: $S - s < \varepsilon$.

<u>משפט:</u> אם f, g רציפות אז גם $g \circ f$ רציפה ולכן אינטגרבילית.

<u>משפט:</u> נניח כי g רציפה ו f אינטגרבילית אזי $g \circ f$ אינטגרבילית.

<u>חישוב אינטגרל מסוים:</u>

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

<u>טענה:</u> נניח כי f רציפה ב- $[a,b]$ וקיים $x_0 \in [a,b]$ כך ש: $f(x_0) > 0$, אזי: $\int_a^b f > 0$

<u>נוסחת אינטגרציה בחלקים עבור אינטגרל מסוים:</u>

$$\int_a^b uv' = uv\Big|_a^b - \int_a^b u'v$$

<u>טענה:</u> נניח כי f אי זוגית ואינטגרבילית ב- $[-a,a]$, אזי: $\int_{-a}^{a} f = 0$.

<u>נגזרת של אינטגרל:</u>

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \Rightarrow F'(x) = f(x)$$

<u>טענה:</u> נניח כי בקטע $[a,b]$ $f(x)$ רציפה וחסומה פרט למספר סופי של נקודות. קיימת $F(x)$ כך ש: $F'(x) = f(x)$ רציפה לכל x ב- $[a,b]$ פרט למספר סופי של נקודות. אזי:

$$\int_a^b f = F(b) - F(a)$$

<u>טורים</u>

<u>טענה:</u> אם $\sum a_n, \sum b_n$ מתכנסים אז גם $\sum (a_n \pm b_n), \sum c \cdot a_n$ מתכנסים ומתקיים:

$$\sum (a_n \pm b_n) = \sum a_n \pm \sum b_n$$

$$\sum c \cdot a_n = c \sum a_n$$

<u>קריטריון קושי:</u> $\sum a_n$ מתכנס אם ורק אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים N כך שלכל $p = 0,1,2,...$:

$$\left| \sum_{n=N}^{N+p} a_n \right| < \varepsilon$$

מקריטריון קושי נובע כי $a_n \to 0$ אם הטור מתכנס.

<u>טענה:</u> הטור $\sum \frac{1}{n^p}$ מתכנס עבור $p > 1$ ומתבדר עבור $p \le 1$.

<u>טענה:</u> אם $\sum a_n$ מתכנס, ו- $a_n \ge 0$ אזי $\sum {a_n}^2$ מתכנס.

<u>טורים חיוביים</u>

<u>טענה:</u> אם $0 \le a_n \le b_n$ אזי:
אם $\sum b_n$ מתכנס אזי $\sum a_n$ מתכנס.
אם $\sum a_n$ מתבדר אזי $\sum b_n$ מתבדר.

<u>טענה:</u> נניח כי $a_n \ge 0, b_n \ge 0$.

אם קיים $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=L$ כאשר $0<L<\infty$, אזי הטורים $\sum a_n$, $\sum b_n$ מתכנסים או מתבדרים ביחד.

<u>קריטריון קושי להתכנסות בלי מעבר לגבול:</u>

נתון $\sum\limits_1^{\infty} a_n$, $a_n\geq 0$.

אם $a_n\leq q^n$, כאשר $q<1$ אזי $\sum a_n$ מתכנס.

לכן אם $\sqrt[n]{a_n}\geq 1$ הטור מתבדר, ואם $\sqrt[n]{a_n}<1$ הטור מתכנס.

מכאן:

אם $\lim\sqrt[n]{a_n}=q<1$ אז $\sum a_n$ מתכנס.

אם $\lim\sqrt[n]{a_n}>1$ אז $\sum a_n$ מתבדר.

ואם $\lim\sqrt[n]{a_n}=1$ אז לא יודעים.

(בשני המקרים מספיק להשתמש ב $\overline{\lim}\sqrt[n]{a_n}$).

<u>קריטריון דלמבר:</u>

אם $\frac{a_{n+1}}{a_n}\leq q<1$ אז $\sum a_n$ מתכנס.

אם $\frac{a_{n+1}}{a_n}\geq 1$ אז $\sum a_n$ מתבדר.

מכאן:

אם $\lim\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$ אז $\sum a_n$ מתכנס.

אם $\lim\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$ אז $\sum a_n$ מתבדר.

אם $\lim\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$ אז לא יודעים.

(רק במקרה הראשון ניתן להשתמש ב $\overline{\lim}\frac{a_{n+1}}{a_n}$).

<u>טענה:</u>

$$\sum_1^{\infty} n^p\alpha^n \qquad \alpha>0 \qquad p\in R$$

אם $\alpha<1$ הטור מתכנס.

אם $\alpha>1$ הטור מתבדר.

אם $\alpha=1$ אז אם $p\geq -1$ הטור מתבדר ואם $p<-1$ הטור מתכנס.

<u>קריטריון ראבה:</u>

$$R_n=n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)$$

אם $R_n\leq 1$ הטור מתבדר.

אם $R_n > 1$ הטור מתכנס.
אם $\lim R_n < 1$ הטור מתבדר.
אם $\lim R_n > 1$ הטור מתכנס.

<u>טענה:</u>

$$a_n, b_n > 0 \qquad \frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

אם $\sum b_n$ מתכנס אז $\sum a_n$ מתכנס.
אם $\sum a_n$ מתבדר אז $\sum b_n$ מתבדר.

<u>טורים כלליים</u>

<u>משפט:</u> אם $\sum |a_n|$ מתכנס אזי $\sum a_n$ מתכנס (בהחלט).

<u>טור לייבניץ:</u>

$$a_n \ge 0 \qquad \sum (-1)^n a_n$$

אם $0 \searrow a_n$ (יורד לאפס) מונוטונית אז הטור מתכנס.

<u>קריטריון דיריכלה:</u>

אם $a_n \to 0$ מונוטונית, ו- $\left|\sum_1^N b_n\right| < C$ אז $\sum a_n b_n$ מתכנס.

<u>קריטריון אבל:</u>

אם $a_n \to a$ מונוטונית ו- $\sum_1^\infty b_n$ מתכנס אז $\sum a_n b_n$ מתכנס.

<u>טענה:</u>

$$\left|\sum_{k=1}^n \sin kx\right| < C \qquad \sum_{k=1}^n \sin kx = \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x}$$

$$\left|\sum_{k=1}^n \cos kx\right| \underset{x \ne 2\pi k}{<} C \qquad \sum_{k=1}^n \cos kx = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x - \sin\frac{1}{2}x}{2\sin\frac{1}{2}x}$$

<u>משפט רימן:</u>
אם $\sum |a_n|$ מתבדר אז ע"י שינוי סדר סכימה ניתן להגיע לכל סכום.

<u>אינטגרל לא אמיתי</u>

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{A\to\infty} \int_a^A f(x)dx$$

טענה:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) = \int_{-\infty}^{a} f(x) + \int_{a}^{\infty} f(x)$$

טענה:

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}$$

אם $\alpha \le 1$ האינטגרל מתבדר.
אם $\alpha > 1$ האינטגרל מתכנס.

מבחני השוואה: נניח $f, g \ge 0$ אינטגרביליות רימן בכל קטע סופי.
אז:
1. אם $0 \le f \le g$ ב- $[a,\infty)$:

אם $\int_{a}^{\infty} g$ מתכנס אזי $\int_{a}^{\infty} f$ מתכנס.

אם $\int_{a}^{\infty} f$ מתבדר אזי $\int_{a}^{\infty} g$ מתבדר.

2. אם קיים $\lim_{x\to\infty} \frac{f}{g} = L$ כאשר $0 < L < \infty$ אזי האינטגרלים $\int_{a}^{\infty} f$ ו- $\int_{a}^{\infty} g$ מתכנסים או מתבדרים ביחד.

הערה: המבחנים נונים גם עבור פונקציות לא חסומות. במקרה זה מחשבים את השטח בשאיפה לנקודה הבעייתית.

הערה: קריטריוני ההשוואה נכונים גם עבור פונקציות עם נקודות בעייתיות.
בקריטריון 2 צריך רק לשנות ש x ישאף לנקודה הבעייתית במקום לאינסוף.

משפט: אם $\int_{a}^{\infty} |f|$ מתכנס אז גם $\int_{a}^{\infty} f$ מתכנס.
(f אינטגרבילית רימן בכל קטע סופי).

קריטריון דיריכלה: אם f אינטגרבילית בכל קטע סופי, ו- $\left|\int_{a}^{A} f\right| < C$ וגם $g \to 0$ מונוטונית

אזי $\int_{a}^{\infty} fg$ מתכנס.

קריטריון אבל: אם $\int_{a}^{\infty} f$ מתכנס ו- g מונוטונית וחסומה אזי $\int_{a}^{\infty} fg$ מתכנס.

קריטריון אינטגרביליות: נניח כי ב- $[0,\infty)$ $f(x)$ מונוטונית יורדת ורציפה, אזי:
$\int_0^\infty f(x), \sum_1^\infty f(n)$ מתכנסים או מתבדרים ביחד.

טורי פונקציות וסדרות פונקציות

$f_n(x)$

$\sum_1^\infty u_n(x)$

תחום ההתכנסות: כל ה- x כך שסידרה/טור מתכנס.

הגדרה: $f_n(x) \to f(x)$ במידה שווה ב- I אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים N כך שלכל $n > N$:
$\left| f_n(x) - f(x) \right| < \varepsilon$
לכל $x \in I$.

טענה: $S(x) = \sum_1^\infty u_n(x)$ ב- I במ"ש אם $S_N(x) \to S(x)$ במ"ש.

משפט: אם $f_n \to f$ במ"ש ב- I (f_n רציפות ב- I) אזי f רציפה.
סדרה של פונקציות רצופות המתכנסת במ"ש מתכנסת לפונקציה רציפה.

מבחן וירשטרס (W): אם $\left| u_n(x) \right| < a_n$ ב- I ו- $\sum a_n$ מתכנס אזי $\sum u_n(x)$ מתכנס במ"ש ב- I.

לייבניץ: אם $u_n(x) = (-1)^n a_n(x)$ ו- $a_n(x) \to 0$ מונוטונית ובמ"ש ב- I אזי $\sum u_n(x)$ מתכנס במ"ש ב- I.

דיריכלה: אם $\left| \sum_1^N b_n(x) \right| < C$ ו- $a_n(x) \to 0$ מונוטונית (לכל x בנפרד) במ"ש, אזי
$\sum_1^\infty a_n(x) b_n(x)$ מתכנס במ"ש.

אבל: אם $\sum b_n(x)$ מתכנס במ"ש ו- $a_n(x)$ מונוטוניות וחסומות ביחד, אזי $\sum_1^\infty a_n(x) b_n(x)$ מתכנס במ"ש.

משפט: נניח כי f_n מתכנס במ"ש ב- I, x_0 נקודת גבול של I, אזי:
$$\lim_{x \to x_0} \lim_{n \to \infty} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} \lim_{x \to x_0} f_n(x)$$
כלומר, אפשר קודם לחשב את הגבול של כל פונקציה ואז את גבול הגבולות. או שאפשר לחשב את הפונקציה הגבולית ואז לחשב את הגבול שלה.

מכאן נובע: $f_n \to f$ במ"ש ו- f_n רציפות, אזי f רציפה.

<u>משפט:</u> $f_n \to f$ במ"ש ב- I ו- f_n אינטגרביליות ב- I, אזי f אינטגרבילית.

$$\lim_{n\to\infty}\int_I f_n = \int_I \lim_{n\to\infty} f_n$$

<u>משפט:</u> נניח כי f_n גזירות ב- $[a,b]$.
נניח כי $f_n(x)$ מתכנסת לפחות ב- x_0 אחת.
ו- $f_n{}'(x)$ מתכנסת במ"ש ב- $[a,b]$.
אזי f_n מתכנסות במ"ש ב- $[a,b]$ לפונקציה גזירה ו- $\lim_{n\to\infty} f_n{}' = (\lim f_n)'$.

<u>משפט אינטגרציה איבר איבר:</u> נניח כי $u_n(x)$ אינטגרבילית ב- I ו- $\sum u_n(x)$ מתכנס במ"ש ב- I, אזי: $\int_I \sum u_n = \sum \int_I u_n$.

<u>טורי חזקות</u>

$$\sum_0^\infty a_n (x-x_0)^n$$

$$\sum_0^\infty a_n x^n \qquad \Leftarrow \qquad x_0 = 0$$

תחום ההתכנסות של טור חזקות זה קטע ברדיוס R סביב x_0.
מחוץ לקטע הוא מתבדר.

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}$$

הערה: בתוך רדיו ההתכנסות הטור מתכנס בהחלט לכל x.
מתכנס במ"ש בכל $[-r_1, r_2] \subseteq (-R, R)$.

$$\lim_{x\to R} \sum a_n x^n = \sum a_n R^n$$

<u>משפט:</u> אם ניתן לכתוב פונקציה כטור חזקות אז זה טור טיילור.

<u>משפט:</u> טור חזקות ניתן לגזור איבר איבר ולעשות אינטגרציה איבר איבר ב- $(-R+x_0, x_0+R)$ (R לא משתנה).
בקצוות צריך לבדוק!

<u>פונקציות מרובות משתנים</u>

<u>הגדרת הגבול:</u>

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = A$$

אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל $0 < d\left((x,y),(x_0,y_0)\right) < \delta$ (כאשר d היא פונקציית מרחק) מתקיים: $\left|f(x,y) - A\right| < \varepsilon$.

<u>משפט:</u> $f(x,y)$ רציפה ב- (x_0,y_0) אם: $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$.

<u>תכונות של פונקציות מרחק:</u>

$d(\underline{x},\underline{y})$

$1.d(\underline{x},\underline{y}) \geq 0, \qquad "=0" \Leftrightarrow \underline{x} = \underline{y}$

$2.d(\underline{x},\underline{y}) = d(\underline{y},\underline{x})$

$3.d(\underline{x},\underline{y}) \leq d(\underline{x},\underline{z}) + d(\underline{y},\underline{z})$

ולכן:

$$d\left((x,y),(x_0,y_0)\right) = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$$

<u>משפט:</u> חילוק, כפל והרכבה של פונקציות רציפות, רציפה.

<u>נגזרת של פונקציה עם 2 משתנים:</u>

נגזרת כיוונית לפי ציר ה- x:

$$\frac{df}{dx} = f_x'(x_0,y_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x,y_0) - f(x_0,y_0)}{x - x_0}$$

<u>דיפרנציאביליות</u>

<u>דיפרנציאלי:</u> קירוב ליניארי.

עבור פונקציה של 2 משתנים מקרבים את הפונקציה למישור.

$$f(x) - f(x_0) = A(x-x_0) + \alpha(x-x_0)$$

כאשר $A = f(x_0)$ ו- $\alpha \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$ פונקציה.

אם ניתן לייצג כך פונקציה אז היא דיפרנציאבילית.