בדיקת התכנסות במידה שווה לסדרות של פונקציות

אוגוסט 2006

3 באוגוסט 2006

1 בדיקת התכנסות במידה שווה

אם נתונה לנו סדרת פונקציות$(f_n(x))$המוגדרת בקטע D. איך נדע האם היא מתכנסת במידה שווה (במ"ש) ב- D?

הבדיקה להתכנסות במ"ש מתחלקת לשלושה שלבים.

1.1 שלב ראשון

נמצא תחילה את הפונקציה הגבולית, כלומר פונקציה $f(x)$ שתקיים $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ לכל $x \in D$. אם לא לכל $x \in D$ הגבול קיים אז, כמובן אין התכנסות במ"ש בקטע D.

1.2 שלב שני

1. אם $f_n(x)$ רציפות D ו- $f(x)$ לא רציפה ב- D אז אין התכנסות במ"ש ב- D(זה נובע מהמשפט אודות הרציפות של הפונקציה הגבולית[1]).

2. אם קיימת סדרת מספרים $a_n \to 0$ כך ש- $|f_n(x) - f(x)| \leq a_n$עבור כל $x \in D$ אז הסדרה מתכנסת במ"ש ב- D, זה נובע מהגדרה של התכנסות במ"ש.

3. אם קיימת סדרת נקודות $(x_n) \subset D$ כך ש- $|f_n(x) - f(x)| \nrightarrow 0$ אז אין התכנסות במ"ש ב- D. זה נובע מהגדרה של התכנסות במ"ש, ראה גם משפט XI.3 בספר של האו"פ.

1.3 שלב שלישי

אם לא הצלחנו לקבל תשובה בעזרת סעיפים 1-3 של השלב השני אז נחשב את

$$c_n = \sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)|$$

וכיוון שלכל$x \in D$ מתקיים$|f_n(x) - f(x)| \, leq \sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)|$אז לפי משפט XI.3 בספר אינפי 2 של האו"פ (או לפי הגדרה בדומה לסעיף 3 בשלב השני) נקבל ש-$(f_n(x))$מכנסת במ"ש ב- D אם ורק אם $c_n \to 0$.

[1]משפט XI.4 בספר אינפי 2 של האו"פ ומשפט 3 עמוד 365 בספר חשבון אינפיניטסימלי של מייזלר