

תורת הקבוצות - סיכום

סמסטר אביב, 2004

1 לוגיקה

1.1 כללי שקילות

$$\begin{aligned}(\forall x) p(x) \vee (\forall x) q(x) &\iff (\forall x) (p(x) \vee q(x)) \\(\exists x) (p(x) \wedge q(x)) &\iff (\exists x) p(x) \wedge (\exists x) q(x) \\(\exists x) (p(x) \rightarrow q(x)) &\iff (\forall x) p(x) \rightarrow (\exists x) q(x) \\(\exists x) (\exists y) r(x, y) &\iff (\exists y) (\exists x) r(x, y) \\(\forall x) (\forall y) p(x, y) &\iff (\forall y) (\forall x) r(x, y)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}p \vee q &\iff q \vee p & (*) \\p \wedge q &\iff q \wedge p & (*) \\(p \vee q) \vee r &\iff p \vee (q \vee r) & (*) \\(p \wedge q) \wedge r &\iff p \wedge (q \wedge r) & (*) \\p \vee (q \wedge r) &\iff (p \vee q) \wedge (p \vee r) \\p \wedge (q \vee r) &\iff (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \\p \wedge p &\iff p & (*) \\p \vee p &\iff p & (*) \\\sim (\sim p) &\iff p & (*) \\(r \rightarrow q) &\iff (\sim p) \vee q \\\sim (p \vee q) &\iff (\sim p) \wedge (\sim q) \\\sim (p \wedge q) &\iff (\sim p) \vee (\sim q)\end{aligned}$$

2 יחסים בין קבוצות

• הגדרות

$$\begin{aligned}S \subseteq B &\iff (\forall x) (x \in A \rightarrow x \in B) \\A \cup B &\triangleq \{x | x \in A \vee x \in B\} \\A \cap B &\triangleq \{x | x \in A \wedge x \in B\} \\A - B &\triangleq \{x | x \in A \wedge x \notin B\} \\A' &\triangleq \{x | x \notin A\}\end{aligned}$$

• דה-מורגן

$$\begin{aligned}(A \cap B)' &= A' \cup B' \\(A \cup B)' &= A' \cap B'\end{aligned}$$

1.2 כללי גרירה

• קבוצות של קבוצות

$$\begin{aligned}\bigcup M &\triangleq \{x | (\exists X) (X \in M \wedge x \in X)\} \\\bigcap M &\triangleq \{x | (\forall X) (x \in M \rightarrow x \in X)\} \quad M \neq \emptyset\end{aligned}$$

• קבוצת חזקה:

$$\begin{aligned}P(A) &= \{X | X \subseteq A\} \\P(A) &\neq \emptyset \\P(\emptyset) &= \{\emptyset\} \\A = B &\iff P(A) = P(B) \\A \subset B &\iff P(A) \subset P(B) \\P(A) \cup P(B) &\subseteq P(A \cup B) \\P(A) \cap P(B) &= P(A \cap B) \\\bigcup P(A) &= A \\\bigcap P(A) &= \emptyset\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}p \wedge q \Rightarrow p & \quad p \Rightarrow p \vee q & (*) \\p \wedge q \Rightarrow q & \quad q \Rightarrow p \vee q & (*) \\\sim p \Rightarrow p \rightarrow q & \quad q \Rightarrow p \rightarrow q \\(\sim p) \wedge (p \vee q) &\Rightarrow q \\p \wedge (p \rightarrow q) &\Rightarrow q \\(\sim q) \wedge (p \rightarrow q) &\Rightarrow (\sim q) \\(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) &\Rightarrow p \rightarrow r \\(p \vee q) \wedge (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) &\Rightarrow r \\\sim (p \rightarrow q) &\Rightarrow \sim q \\\sim (p \rightarrow q) &\Rightarrow p \\(r \leftrightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow p) &\Rightarrow r \leftrightarrow p\end{aligned}$$

1.2.1 כללי שקילות וגרירה (עם כמתים)

$$\begin{aligned}(\exists x) (p(x) \vee q(x)) &\iff (\exists x) p(x) \vee (\exists x) q(x) \\(\forall x) (p(x) \wedge q(x)) &\iff (\forall x) p(x) \wedge (\forall x) q(x) \\\sim [(\exists x) p(x)] &\iff (\forall x) (\sim p(x)) \\\sim [(\forall x) p(x)] &\iff (\exists x) (\sim p(x))\end{aligned}$$

• מכפלה קטרונית:

$$x \mapsto \begin{cases} 1 & x \in D \\ 0 & x \notin D \end{cases} \quad \text{פונקציה אופיינית של } D$$

• תכונות:

$$\begin{aligned} L \subseteq M &\iff (\forall x) (h_L(x) \leq h_M(x)) \\ (\forall x) h_{C \cap D}(x) &= h_C(x) \cdot h_D(x) \\ (\forall x) h_{C \cup D}(x) &= h_C(x) + h_D(x) - h_C(x) \cdot h_D(x) \\ (\forall x) h_C(x) &= 1 - h_{C^c}(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a, b) &= \{\{a\}, \{a, b\}\} \\ ((a, b), s) &= (a, b, s) \\ A \times B &= \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\} \\ A \times (B \cup C) &= (A \times B) \cup (A \times C) \\ A \times (B \cap C) &= (A \times B) \cap (A \times C) \\ A \times (B - C) &= (A \times B) - (A \times C) \\ A \subseteq D &\Rightarrow A \times C \subseteq A \times D \\ A \times B = \emptyset &\iff A = \emptyset \vee B = \emptyset \end{aligned}$$

$$A_1 = A_2 \wedge \iff [f_1 = (A_1, B_1, G_1)] = [f_2 = (A_2, B_2, G_2)] \cdot B_1 = B_2 \wedge G_1 = G_2$$

• קבוצת פונקציות $B^A \triangleq \{G_f \mid f: A \rightarrow B\}$.

• תמונה של C לפי f - $f(C) = \{y \mid (\exists x) (y = f(x) \wedge x \in C)\}$.

- תכונות התמונה:

$$\begin{aligned} f(\emptyset) &= \emptyset \\ f(\{a\}) &= \{f(a)\} \\ C \subseteq D &\Rightarrow f(C) \subseteq f(D) \\ f(C \cup D) &= f(C) \cup f(D) \\ f(C \cap D) &\subseteq f(C) \cap f(D) \\ f(C) - f(D) &\subseteq f(C - D) \end{aligned}$$

• מקור של E לפי f - $f^{-1}(E) = \{x \mid f(x) \in E\}$.

- תכונות המקור:

$$\begin{aligned} f^{-1}(\emptyset) &= \emptyset \\ E \subseteq F &\Rightarrow f^{-1}(E) \subseteq f^{-1}(F) \\ f^{-1}(E \cup F) &= f^{-1}(E) \cup f^{-1}(F) \\ f^{-1}(E \cap F) &= f^{-1}(E) \cap f^{-1}(F) \\ f^{-1}(E - F) &= f^{-1}(E) - f^{-1}(F) \end{aligned}$$

• בהנתן $f, \hat{f}$, נגדיר, $\hat{\hat{f}}$

$$\begin{aligned} \hat{f}: P(A) &\rightarrow P(B) \\ X &\mapsto f(X) \\ \hat{\hat{P}}(\hat{B}) &\rightarrow P(A) \\ X &\mapsto f^{-1}(X) \end{aligned}$$

• הרכבה - $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$

$$g \circ f = (A, C, G_{g \circ f} = G_g \circ G_f)$$

• פונקציה אינוקטיבית / חח"ע

$$\begin{aligned} \iff (\forall u, v \in A) (u \neq v \rightarrow f(u) \neq f(v)) \\ \iff (\forall u, v \in A) (f(u) = f(v) \rightarrow u = v) \end{aligned}$$

• פונקציה מ- A ל- B לפי G היא $f = (A, B, G)$.

3 רלציות ופונקציות

3.1 רלציות

• הרכבה ($\circ$) והיפוך ($^{-1}$).

$$\begin{aligned} R^{-1} &\triangleq \{(x, y) \mid (y, x) \in R\} \\ S \circ R &\triangleq \{(x, z) \mid (\exists y) ((x, y) \in R \wedge (y, z) \in S)\} \\ (R^{-1})^{-1} &= R \\ T \circ (S \circ R) &= (T \circ S) \circ R \\ (S \circ R)^{-1} &= R^{-1} \circ S^{-1} \end{aligned}$$

• רלציות מעל קבוצה

$$I_A \triangleq \{(x, x) \mid x \in A\}$$

- רפלקסיביות - $(\forall x) (x \in A \rightarrow (x, x) \in R)$

- סימטריה - $(\forall x, y) ((x, y) \in R \rightarrow (y, x) \in R)$

- טרנזיטיביות - $(\forall x, y, z) ((x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \rightarrow (x, z) \in R)$

- אנטיסימטריה - $(\forall x, y) ((x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \rightarrow x = y)$

• רלציות שקילות היא רלציה רפלקסיבית, סימטרית וטרנזיטיבית

- מחלקת שקילות על A לפי R

$$[a]_R \triangleq \{x \mid (x, a) \in R \wedge a \in A\}$$

- מנה של A מודולו R $A/R \triangleq \{[a]_R \mid a \in A\}$

- מחלקות שקילות יכולות להיות שוות או זרות, ומהוות חלוקה של הקבוצה.

3.2 פונקציות

• רלציה פונקציונאלית G

$$(\forall A) (x \in A \rightarrow (\exists! y) (x, y) \in G)$$

• S קבוצה אינדוקטיבית

$$\iff (\emptyset \in S) \wedge (\forall X) (X \in S \rightarrow X^+ \in S)$$

• חיתוך של קבוצות אינדוקטיביות הוא אינדוקטיבי.

• $\mathbb{N}$ הוא הקבוצה האינדוקטיבית הקטנה ביותר (או חיתוך של כל הקבוצות האינדוקטיביות)

• פעולות:

$$+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$(m, n) \mapsto m + n = \begin{cases} m + 0 = m & n = 0 \\ m + n^+ = (m + n)^+ & n \Rightarrow n^+ \end{cases}$$

$$\cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$(m, n) \mapsto m \cdot n = \begin{cases} m \cdot 0 = 0 & n = 0 \\ m \cdot n^+ = m \cdot n + m & n \Rightarrow n^+ \end{cases}$$

4.2 - השלמים $\mathbb{Z}$

$\mathbb{A} \triangleq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ מגדירים על $\mathbb{A}$ את הרלציה S :

$$(a, b) S (c, d) \iff a +_{\mathbb{N}} d = b +_{\mathbb{N}} c$$

S היא רלציית שקילות. נגדיר את $\mathbb{Z} = \mathbb{A}/S$.

$$\begin{aligned} 0_{\mathbb{Z}} &\triangleq [(1_{\mathbb{N}}, 1_{\mathbb{N}})] \\ -3_{\mathbb{Z}} &\triangleq [(0_{\mathbb{N}}, 3_{\mathbb{N}})] \\ 3_{\mathbb{Z}} &\triangleq [(3_{\mathbb{N}}, 3_{\mathbb{N}})] \end{aligned}$$

פונקציית שיכון:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{Z} \\ n_{\mathbb{N}} &\mapsto [(n_{\mathbb{N}}, 0_{\mathbb{N}})] = n_{\mathbb{Z}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} +_{\mathbb{Z}} : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z} \\ [(a, b)], [(c, d)] &\mapsto [(a + c, b + d)] \\ \cdot_{\mathbb{Z}} : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z} \\ [(a, b)], [(c, d)] &\mapsto [(ac + bd, ad + bc)] \end{aligned}$$

4.3 - הרציונאליים $\mathbb{Q}$

$\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$, כאשר $\mathbb{B} \triangleq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ מגדירים על $\mathbb{B}$ את הרלציה T :

$$(a, b) T (c, d) \iff a \cdot d = b \cdot c$$

T היא רלצית שקילות. ו- $\mathbb{Q} = \mathbb{B}/T$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}_{\mathbb{Q}} &= [(1_{\mathbb{Z}}, 2_{\mathbb{Z}})] \\ 0_{\mathbb{Q}} &= [(0_{\mathbb{Z}}, 1_{\mathbb{Z}})] \\ -\frac{1}{2}_{\mathbb{Q}} &= [(-1_{\mathbb{Z}}, 2_{\mathbb{Z}})] \end{aligned}$$

- הרכבת אינז'קטיביות היא אינז'קטיבית, ו- $f : A \rightarrow B$ אינז'קטיבית אם ורק אם $(\exists g : B \rightarrow A) (g \circ f = 1_A)$.

• פונקציה סורז'קטיבית / על

$$\iff (\forall y \in B) (\exists x \in A) (f(x) = y)$$

$$\iff \text{Im } f = B$$

- הרכבת סורז'קטיביות היא סורז'קטיבית, וגם $(\exists h : B \rightarrow A) (f \circ h = 1_B)$.

• פונקציה בי'קטיבית/הפיכה הוא פונקציה אינז'קטיבית וסורז'קטיבית

$$\iff (\exists h : B \rightarrow A) (f \circ h) = 1_B \wedge (\exists B \rightarrow A) (g \circ f) = 1_B$$

במצב זה, $g = h$ כמו כן, הרכבת בי'קטיביות היא בי'קטיבית.

- עבור f, g בי'קטיביות:

$$\begin{aligned} f \circ f^{-1} &= 1_B \\ f^{-1} \circ f &= 1_A \\ (g \circ f)^{-1} &= f^{-1} \circ g^{-1} \end{aligned}$$

• כל פונקציה ניתנת לפירוק לשלוש פונקציות: בי'קטיבית, סורז'קטיבית ואינז'קטיבית.

• משפחה/קבוצה $M - (M_i)_{i \in I}$ נגדיר:

$$\begin{aligned} \bigcup_{i \in I} A_i &\triangleq \{x \mid (\exists i) (i \in I \wedge x \in A_i)\} \\ \bigcap_{i \in I} A_i &\triangleq \{x \mid (\forall i) (i \in I \rightarrow x \in A_i)\} \\ \prod_{i \in I} A_i &\triangleq \{f : f : I \rightarrow A \wedge (f(i) \in A_i, \forall i \in I)\} \end{aligned}$$

• הקבוצה B^A היא קבוצת כל הפונקציות מ- A ל- B .

- תכונות:

$$\begin{aligned} \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right)' &= \bigcap_{i \in I} A_i' \\ \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right)' &= \bigcup_{i \in I} A_i' \end{aligned}$$

4 בניית מערכת המספרים

4.1 $\mathbb{N}$ - הטבעיים

• העוקב של A - $A^+ \triangleq A \cup \{A\}$

- מתקיים, $A \in A^+, A \subset A^+$.

• נכנה $\emptyset = 0$.

$$\begin{aligned}
 A \sim B &\Rightarrow P(A) \sim P(B) \\
 (A \sim C) \wedge (B \sim D) &\Rightarrow A^B \sim C^D \\
 (A \sim C) \wedge (B \sim D) &\wedge (A \cap B = C \cap D = \emptyset) \\
 &\Rightarrow (A \cup B) \sim (C \cup D) \\
 (A \sim C) \wedge (B \sim D) &\Rightarrow (A \times B) \sim (C \times D) \\
 A \preceq C &\Rightarrow (A \cup B) \preceq (C \cup B) \\
 A \preceq C &\Rightarrow (A \times B) \preceq (C \times B) \\
 A \preceq C &\Rightarrow A^B \preceq C^B \\
 A \preceq C &\Rightarrow B^A \preceq B^C \\
 A \preceq C &\Rightarrow P(A) \preceq P(C) \\
 A &\preceq P(A)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g: \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Q} \\
 u_{\mathbb{Z}} &\mapsto [(u_{\mathbb{Z}}, 0)] = u_{\mathbb{Q}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 +_{\mathbb{Q}}: \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} &\rightarrow \mathbb{Q} \\
 [(a, b)], [(c, d)] &\mapsto [(ad + bc, bd)] \\
 \cdot_{\mathbb{Q}}: \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} &\rightarrow \mathbb{Q} \\
 [(a, b)], [(c, d)] &\mapsto [(ac, bd)]
 \end{aligned}$$

4.4 $\mathbb{R}$ - הממשיים. באמצעות סדרות Cauchy.

$$D \triangleq \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid (a_n) \text{ סדרת קושי} \wedge a_n \in \mathbb{Q}\}$$

מגדירים לע D את הרלציה V :

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} V (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \iff \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 0_{\mathbb{Q}}$$

V היא רלצית שקילות, ו- $\mathbb{R} = D/V$.

$$e_{\mathbb{R}} \triangleq \left[\left(1 + \frac{1}{n} \right)_{n \in \mathbb{N} - 0} \right]$$

פונקציות שיכון:

$$\begin{aligned}
 h: \mathbb{Q} &\rightarrow \mathbb{R} \\
 u_{\mathbb{Q}} &\mapsto [(a_n = u_{\mathbb{Q}})_{n \in \mathbb{N}}] = \mu_{\mathbb{R}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 +_{\mathbb{R}}: \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\
 [(a_n)], [(b_n)] &\mapsto [(a_n + b_n)] \\
 \cdot_{\mathbb{R}}: \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\
 [(a_n)], [(b_n)] &\mapsto [(a_n \cdot b_n)]
 \end{aligned}$$

5 תכונות שקילות ושלטה בין קבוצות

- פונקציות הן שקולות אם קיימת פונקציה ביז'קטיבית ביניהן. השקילות היא רלצית שקילות.
- A נשלטת על ידי B ($A \preceq B$) אם קיימת פונקציה איז'קטיבית מ- A ל- B . זהו יחס סדר חלקי.

$$\begin{aligned}
 A \cup B &\sim B \cup A \\
 (A \cup B) \cup C &\sim A \cup (B \cup A) \\
 A \times B &\sim B \times A \\
 (A \times B) \times C &\sim A \times (B \times C) \\
 A \times (B \cup C) &\sim (A \times B) \cup (A \times C) \\
 (A^B)^C &\sim A^{B \times C} \\
 A^{B \cup C} &\sim A^B \times A^C \\
 (A \times B)^C &= A^C \times B^C \\
 P(A) &\sim \{0, 1\}^A
 \end{aligned}$$

- עבור קרדינל על סופי -

$$\begin{aligned}
 \alpha &= 2\alpha = \alpha^2 \\
 1 \leq \beta \leq \alpha &\Rightarrow \alpha \cdot \beta = \alpha \\
 \alpha \leq \beta &\Rightarrow \alpha + \beta = \alpha \\
 2 \leq \beta \leq \alpha &\Rightarrow \beta^\alpha = 2^\alpha \\
 \delta \leq \mu &\Rightarrow \delta^\alpha \leq \mu^\alpha \\
 c^c &= 2^c = \mathcal{F}
 \end{aligned}$$

5.2 קרדינלים

•

$$\begin{aligned}
 \aleph_0 + 1 &= \aleph_0 \\
 \alpha + \beta &= \beta + \alpha \\
 \text{card}(A \dot{\cup} B) &\triangleq \alpha + \beta \\
 \text{card}(A \times B) &\triangleq \alpha \beta \\
 \text{card } B^A &\triangleq \beta^\alpha \\
 \alpha \leq \beta &\Rightarrow (\exists \gamma) (\alpha + \gamma = \beta) \\
 \alpha + \alpha &= 2\alpha \\
 \alpha \cdot \alpha &= \alpha^2 \\
 \text{card } P(A) &= 2^\alpha
 \end{aligned}$$

• הקרדינל של כל הפונקציות הרציפות מ- $\mathbb{R}$ ל- $\mathbb{R}$ הוא c , ושל כולן $\mathcal{F}$ -

5. $s \in A$ הינו חסם מלרע של $(D, \leq_1) \iff (f(D), \leq_2)$.

6. $t \in A$ הינו חסם מלעיל של $(D, \leq_1) \iff (f(D), \leq_2)$.

7. $u \in A$ הינו סופרימום של $(D, \leq_1) \iff (f(D), \leq_2)$.

8. $v \in A$ הינו אינפימום של $(D, \leq_1) \iff (f(D), \leq_2)$.

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n \triangleq \text{card} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \aleph_0$$

$$\prod_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n \triangleq \text{card} \times_{n \in \mathbb{N}} A_n = c$$

6.1.2 משפט 2

6 סדר

תהינה $(A, \leq_1)$ ו- $(B, \leq_2)$ קבוצות סדורות חלקית דומות. אזי:

1. $(A, \leq_1)$ קבוצה סדורה כליל $\iff (B, \leq_2)$ קבוצה סדורה כליל.

2. $(A, \leq_1)$ קבוצה סדורה היטב $\iff (B, \leq_2)$ קבוצה סדורה היטב.

7 פעולות בין אורדינלים

7.1 הגדרות

• רישא של A לפי a : $I_A(a) = \{x | x \in A \wedge x < a\}$

• $I(A)$ - קבוצת הרישות של A .

• לכל A, B מתקיים $A \simeq I_B(\beta) \vee B \simeq I_A(\alpha) \vee A \simeq B$

• כל קבוצה ניתנת לסידור היטב.

• a האלמנט הקטן ביותר ב- A - $(\forall x \in A) (a \leq x)$

• b הגדול ביותר ב- A - $(\forall x \in A) (b \geq x)$

• c מינימלי ב- A - $(\forall x \in A) (x \leq c \rightarrow x = c)$

• d מקסימלי - $(\forall x \in A) (x \geq d \rightarrow x = c)$

• s חסם מלרע של B ב- A - $(\forall x \in B) (s \leq x)$

• t חסם מלעיל של B ב- A - $(\forall x \in B) (s \leq x)$

• גדול החסמים מלרע נקרה אינפימום.

• קטן החסמים מלעיל נקרא סופרימום.

• בין קבוצות - סדר החלה.

$$\sup_{P(A)} M = \bigcup M, \inf_{P(A)} M = \bigcap M, M \subseteq P(A) -$$

• קבוצה סדורה כליל אם ניתן להשוות כל 2 איברים בקבוצה.

• אם לכל תת קבוצה לא ריקה של A יש איבר קטן ביותר, הקבוצה סדורה היטב.

• שריג היא קבוצה סדורה חלקית כך שלכל קבוצה של 2 אל-מנטים, יש לה אינפימום וסופרימום.

• f שומרת סדר - $(\forall x_1, x_2 \in A) (x_1 \leq_A x_2 \leftrightarrow f(x_1) \leq f(x_2))$

• פונקציה ביז'קטיבית שומרת סדר היא איזומורפיזם סדר.

• אם בין A ל- B ניתן לבנות איזומורפיזם סדר, $A \simeq B$.

6.1 משפטים על קבוצות סדורות חלקית דומות

6.1.1 משפט 1:

תהינה $(A, \leq_1)$ ו- $(B, \leq_2)$ קבוצות סדורות חלקית דומות, $(D, \leq_1)$ תת קבוצה סדורה חלקית (סדר מושרה) של $(A, \leq_1)$, פונקצית דמיון (איזומורפיזם סדר) $f: A \rightarrow B$ אז:

1. $a \in A$ הינו האלמנט הקטן ביותר ב- $(A, \leq_1) \iff (f(a), \leq_2)$ הינו האלמנט הקטן ביותר ב- $(B, \leq_2)$.

2. $c \in A$ הינו האלמנט הגדול ביותר ב- $(A, \leq_1) \iff (f(c), \leq_2)$ הינו האלמנט הגדול ביותר ב- $(B, \leq_2)$.

3. $\alpha \in A$ הינו אלמנט מקסימלי ב- $(A, \leq_1) \iff (f(\alpha), \leq_2)$ הינו אלמנט מינימלי ב- $(B, \leq_2)$.

4. $\ell \in A$ הינו אלמנט מינימלי של ב- $(A, \leq_1) \iff (f(\ell), \leq_2)$ הינו אלמנט מינימלי ב- $(B, \leq_2)$.

$$\alpha \cdot \beta \triangleq \text{ord}(A \otimes B)$$

$$A \otimes B \triangleq (A \times B, \leq_\otimes)$$

$$(x, y) \leq_\otimes (u, v) \iff (y < v) \wedge ((y < v) \vee ((y = v) \wedge (x < u)))$$

$$\alpha \cdot \beta \triangleq \begin{cases} 0 & \beta = 0 \\ \alpha \gamma + \alpha & \beta = \gamma^+ \\ \sup \{\alpha \xi | \xi < \lambda\} & \beta = \lambda(\text{גבולי}) \end{cases}$$

$$\alpha^\beta \triangleq \text{ord}(A^B, \leq_a)$$

$$A^B = \{f \in A^B | \sup f \text{ is finit}\}$$

$$f <_a g \iff f(m) < g(m) \wedge m = \max \{x | f(x) \neq g(x)\}$$

$$\alpha^\beta \triangleq \begin{cases} 1 & \beta = 0 \\ \alpha^\gamma \cdot \alpha & \beta = \gamma^+ \\ \sup \{\alpha^\xi | \xi < \lambda\} & \beta = \lambda(\text{גבולי}) \end{cases}$$

$$\sum_{\xi < \beta} \alpha_\xi \triangleq \begin{cases} 0 & \beta = 0 \\ \sum_{\xi < \gamma} \alpha_\xi + \alpha_\gamma & \beta = \gamma^+ \\ \sup \left\{ \sum_{\xi < \delta} \alpha_\xi \mid \delta < \lambda \right\} & \beta = \lambda \text{ (גבולי)} \end{cases}$$

$$\prod_{\xi < \beta} \alpha_\xi = \begin{cases} 1 & \beta = 0 \\ \left(\prod_{\xi < \gamma} \alpha_\xi \right) \alpha_\gamma & \beta = \gamma^+ \\ \sup \left\{ \prod_{\xi < \delta} \alpha_\xi \mid \delta < \lambda \right\} & \beta = \lambda \text{ (גבולי)} \end{cases}$$

7.2 תכונות

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta) + \gamma &= \alpha + (\beta + \gamma) \\ \alpha + 0 &= 0 + \alpha = \alpha \\ \gamma + \alpha = \gamma + \beta &\Rightarrow \alpha = \beta \\ \alpha < \beta &\iff \gamma + \alpha < \gamma + \beta \\ \alpha \leq \beta &\iff \alpha + \gamma \leq \beta + \gamma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma &= \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) \\ \alpha \cdot 1 &= 1 \cdot \alpha = \alpha \\ \gamma \cdot \alpha = \gamma \cdot \beta \wedge \gamma > 0 &\Rightarrow \alpha = \beta \\ \alpha < \beta \wedge \gamma > 0 &\iff \gamma \alpha < \gamma \beta \\ \alpha \leq \beta &\iff \alpha \gamma \leq \beta \gamma \\ \alpha (\beta + \gamma) &= \alpha \beta + \alpha \gamma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\alpha^\beta)^\gamma &= \alpha^{\beta \cdot \gamma} \\ \alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma &= \alpha^{\beta + \gamma} \\ \alpha^\beta = \alpha^\gamma \wedge \alpha > 1 &\Rightarrow \beta = \gamma \\ \alpha < \beta \wedge \alpha > 1 &\iff \alpha^\beta < \alpha^\gamma \\ \alpha \leq \beta &\iff \alpha^\gamma \leq \beta^\gamma \end{aligned}$$

הערות, תיקונים וכו' - נא לשלוח ל-ronen@tx.technion.ac.il עדכ-
ונים, במידה ויהיו, ניתן יהיה למצוא ב-ronen/~tx.technion.ac.il.