משוואה נפרדה

גיא רוטנברג - http://www.sikumuna.co.il

אוגוסט 2006

משוואה נפרדה (separable) היא משוואה שניתן לסדר אותה בצורה

$$y' = X(x) \cdot Y(y) \tag{1}$$

כאשר X היא פונקציה של x ו- Y היא פונקציה של y.
על מנת לפתור את המשוואה נעבוד תחת מספר הנחות:

- $X(x)$ רציפה בקטע (α, β).
- $Y(y)$ ונגזרתה $Y'(y)$ רציפות בקטע (γ, δ).

תחת הנחות אלו מתקיימים התנאים של משפט הקיום והיחידות בתחום המלבני

$$D = \{(x,y) | \alpha < x < \beta,\ \gamma < y < \delta\}$$

כעת משידוע שקיים פתרון (ובהינתן תנאי נוסף כמו $y(x_o) = y_o$ כאשר $(x_o, y_o) \in D$ אז הפתרון יחיד), נתחיל לפתור את המשוואה.
תחילה נמצא את כל הפתרונות הסינגולריים של המשוואה (1). פתרון סינגולרי במקרה זה הוא פונקציה קבועה $y(x) \equiv y_1$ כאשר $Y(y_1) = 0$.
כעת משמצאנו את הפתרונות הסינגולריים נחפש את הפתרון הכללי. נניח כעת כי $Y(y) \neq 0$, לכן נוכל לחלק את המשוואה (1) ב- $Y(y)$ ונקבל

$$\frac{y'}{Y(x)} = X(x) \tag{2}$$

נעבור ללשון הדיפרנציאל במשוואה (2) ונכפול ב- dx.

$$\frac{dy}{Y(y)} - X(x)dx = 0$$

ובעזרת אינטגרציה נקבל את הפתרון:

$$\int^y \frac{du}{Y(u)} - \int^x X(t)dt = C$$

כעת נבודד (אם ניתן) את y ונקבל את הפתרון הכללי. לפתרון הכללי יש להוסיף את הפתרונות הסינגולריים שחישבנו ממקודם על מנת לקבל את אוסף כל הפתרונות.