

משוואה מדויקת

גיא רוטנברג - guy@sikumuna.co.il

סתיו 2006

1 הגדרות ומשפטים

המשוואה הדיפרנציאלית מסדר ראשון

$$X(x, y)dx + Y(x, y)dy = 0 \quad (1)$$

תקרא משוואה מדויקת (exact) אם קיים עברה פוטנציאל, כלומר פונקציה $\Phi(x, y)$ שעבורה מתקיים

$$\Phi_x(x, y) = X(x, y)$$

$$\Phi_y(x, y) = Y(x, y)$$

אם המשוואה (1) מדויקת אז פתרונה הכללי נתון על ידי

$$\Phi(x, y) = C$$

נשים לב כי הפתרון הזה הוא פתרון סתום, משמע לא נקבל את y כפונקציה מפורשת אלא כפונקציה סתומה שממנה נוכל לנסות לחלץ את y .

ניתן להבחין אם משוואה היא מדויקת או לא על סמך הפונקציות X ו- Y בלבד בלי חישוב הפוטנציאל. המשוואה הדיפרנציאלית (1) היא מדויקת אם ורק אם מתקיים

$$X_y(x, y) = Y_x(x, y)$$

תנאי זה הוא הכרחי ומספיק לקביעת המשוואה כמדויקת.

1.1 מציאת הפוטנציאל

מציאת הפוטנציאל של משוואה דיפרנציאלית מדויקת הוא תהליך פשוט (אך לא תמיד קל). כאמור $\Phi_x(x, y) = X(x, y)$. נבצע אינטגרציה לפי x של המשוואה ונקבל

$$\Phi(x, y) = \int X(x, y) dx + C(y) \quad (2)$$

כיוון שמדובר על אינטגרציה לפי x של פונקציה של x ו- y הרי שקבוע האינטגרציה הוא קבוע ביחס ל- x בלבד אבל יכול להיות פונקציה של y . כמו כן אנו יודעים גם כי $\Phi_y(x, y) = Y(x, y)$ ולכן נגזור את השווינון (2) ונשווה את התוצאה ל- $Y(x, y)$ ומכאן נקבל משוואה דיפרנציאלית עם המשתנה $C'(y)$ שאותה נוכל לפתור בקלות על ידי אינטגרציה לפי y ולקבל את הפוטנציאל, ומכאן גם את הפתרון.

שים לב שאין חשיבות לכך שבחרנו לבצע קודם אינטגרציה לפי x ואז להשוות את הנגזרת לפי y ל- Y , יכולנו באופן דומה לבצע אינטגרציה לפי y של $Y(x, y)$ ולאחר מכן להשוות את הנגזרת לפי x של Φ ל- X .

2 דוגמאות ותרגילים

דוגמא 1 פתור את המשוואה

$$\frac{1}{x} dy - \frac{y}{x^2} dx = 0$$

פתרון זוהי משוואה פשוטה ובוודאי תשים לב שניתן לפתור אותה על ידי מעבר למשוואה לינארית בקלות. אבל נפתור משוואה זו בטכניקה של משוואה מדויקת על מנת להדגים את עקרונות הפתרון.

במקרה שלנו $X(x, y) = -\frac{y}{x^2}$ ו- $Y(x, y) = \frac{1}{x}$ מתקיים

$$Y_x = -\frac{1}{x^2} = X_y$$

ועל כן זוהי משוואה מדויקת. נמצא את הפוטנציאל שלה. מתקיים

$$\Phi_x(x, y) = X(x, y)$$

נבצע אינטגרציה על שני הצדדים ונקבל

$$\Phi(x, y) = \int X(x, y) dx + C(y) = \int -\frac{y}{x^2} dx + C(y) = \frac{y}{x} + C(y)$$

כעת נגזור ונשווה ל- Y

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} + C'(y) &= \frac{1}{x} \\ C'(y) &= 0 \end{aligned}$$

מכאן נוכל לקבל את $C(y)$ על ידי אינטגרציה. נזכור כי אנו מחפשים פתרון יחיד ולכן נוכל לבחור לשם נוחות את $C(y) = 0$ ונקבל כי

$$\Phi(x, y) = \frac{y}{x}$$

שים לב שזהו קבוע ומכאן נקבל את הפתרון הכללי
C אחר!

$$\frac{y}{x} = C$$

במקרה זה נוכל גם לבודד את y ולקבל ביטוי מפורש עבור y

$$y = Cx$$

דוגמא 2 פתור את המשוואה

$$(y \cos x + 2xe^y) dx + (\sin x + x^2 e^y + 2) dy = 0$$

פתרון במשוואה זו כבר לא נוכל להעביר את המשוואה למצב של משוואה לינארית ולכן נדרש לפתור אותה כמשוואה מדויקת. במקרה זה

$$\begin{aligned} X(x, y) &= y \cos x + 2xe^y \\ Y(x, y) &= \sin x + x^2e^y + 2 \end{aligned}$$

ונקבל כי

$$X_y = \cos x + 2xe^y = Y_x$$

ולכן זוהי משוואה מדויקת. נחשב את הפוטנציאל

$$\Phi_x(x, y) = X(x, y)$$

נבצע אינטגרציה על שני הצדדים ונקבל

$$\Phi(x, y) = \int X(x, y) dx + C(y) = \int y \cos x + 2xe^y dx + C(y) = y \sin x + x^2e^y + C(y)$$

כעת נגזור את $\Phi(x, y)$ לפי y ונשווה ל- Y

$$\begin{aligned} \sin x + x^2e^y + C'(y) &= \sin x + x^2e^y + 2 \\ C'(y) &= 2 \end{aligned}$$

נוכל לבחור אם כן $C(y) = 2y$ ונקבל כי

$$\Phi(x, y) = y \sin x + x^2e^y + 2y$$

ולכן הפתרון הכללי יהיה

$$y \sin x + x^2e^y + 2y = C$$

דוגמא 3 פתור את המשוואה

$$2xyy' + y^2 - 2x = 0$$

פתרון נשים לב תחילה שהמשוואה הנתונה עדיין אינה נמצאת בצורה הסטנדרטית של משוואה מדויקת. לכן לפני שנבדוק האם היא מדויקת נעביר אותה לצורה הסטנדרטית

$$2xydy + (y^2 - 2x) dx = 0$$

נקבל במקרה זה כי

$$\begin{aligned} X &= y^2 - 2x \\ Y &= 2xy \end{aligned}$$

ניתן לראות כי

$$Y_x = 2y = X_y$$

ועל כן לפנינו משוואה מדויקת. נמצא את הפוטנציאל. מתקיים $\Phi_y = Y$, נבצע אינטגרציה על שני הצדדים ונקבל כי

$$\Phi = \int Y(x, y) dy + C(x) = \int 2xy dy + C(x) = xy^2 + C(x)$$

כמו כן מתקיים $\Phi_x = X(x, y)$ כלומר מתקיים

$$\begin{aligned} y^2 + C'(x) &= y^2 - 2x \\ C'(x) &= -2x \end{aligned}$$

אנו מחפשים רק פתרון פרטי של $C(x)$ ולכן נוכל לבחור $C(x) = -x^2$ והפוטנציאל יהיה

$$\Phi(x, y) = xy^2 - x^2$$

והפתרון הכללי יהיה

$$xy^2 - x^2 = C$$

במקרה זה ניתן לבודד את y ולקבל כי

$$y = \pm \sqrt{x + \frac{C}{x}}$$

דוגמא 4 פתור את המשוואה

$$2(y+1)e^x dx + 2(e^x - 2y)dy$$

פתרון זוהי משוואה מדויקת. $X = 2(y+1)e^x$, $Y = 2(e^x - 2y)$ מתקיים

$$X_y = 2e^x = Y_x$$

נמצא את הפוטנציאל של המשוואה. מתקיים $\Phi_x = X$ נבצע אינטגרציה על שני הצדדים ונקבל

$$\Phi = \int X dx + C(y) = \int 2(y+1)e^x dx + C(y) = 2(y+1)e^x + C(y)$$

כמו כן $\Phi_y = Y$ ולכן נקבל כי

$$\begin{aligned} 2e^x + C'(y) &= 2(e^x - 2y) \\ C'(y) &= -4y \end{aligned}$$

כזכור מספיק לנו פתרון פרטי של $C(y)$ ולכן נבחר $C(y) = -2y^2$ ונקבל כי

$$\Phi = 2(y+1)e^x - 2y^2$$

והפתרון הכללי יהיה

$$2(y+1)e^x - 2y^2 = C$$

נשים לב שאם C הוא קבוע כלשהו גם $A = \frac{C}{2}$ הוא קבוע כלשהו ונקבל כי הפתרון הכללי הוא

$$(y+1)e^x - y^2 = A$$

דוגמא 5 פתור את המשוואה

$$(2xy + 6x)dx + (x^2 + 4y^3)dy = 0$$

פתרון במקרה זה $Y = x^2 + 4y^3$, $X = 2xy + 6x$ ומתקיים

$$X_y = 2x = Y_x$$

ולכן לפנינו משוואה מדויקת. נמצא את הפוטנציאל שלה. מתקיים $\Phi_x = X$ ולכן נקבל על ידי אינטגרציה

$$\Phi = \int X dx + C(y) = x^2y + 3x^2 + C(y)$$

$\Phi_y = Y$ לכן נגזור את שני האגפים של השיוון האחרון לפי y ונקבל כי

$$\begin{aligned} x^2 + C'(y) &= x^2 + 4y^3 \\ C'(y) &= 4y^3 \end{aligned}$$

כזכור אנו מחפשים רק פתרון אחד של $C(y)$ ולכן ניקח $C(y) = y^4$ ונקבל כי

$$\Phi = x^2y + 3x^2 + y^4 = x^2(y + 3x^2) + y^4$$

והפתרון הכללי יהיה

$$x^2(y + 3x^2) + y^4 = C$$