

משוואת ברנולי

גיא רוטנברג - <http://www.sikumuna.co.il>

אוגוסט 2006

1 תיאוריה

משוואת ברנולי (Bernoulli) היא משוואה דיפרנציאלית רגילה בעלת הצורה של

$$y' + a(x)y = b(x)y^m$$

משוואת ברנולי אינה משוואה לינארית אך ניתנת להפיכה למשוואה לינארית יחסית בקלות. נמצא את פתרונות המשוואה שאינם מתאפסים (באופן כללי אם $m \leq 0$ אז $y \equiv 0$ אינו פתרון ואם $m > 0$ אז $y \equiv 0$). נחפש עתה את הפתרונות שאינם מתאפסים. אם נניח כי $y \neq 0$ וכי $m \neq 1$ (במקרה זה זוהי משוואה לינארית ממעלה ראשונה) אז נוכל לכפול את המשוואה ב- $(1-m)y^{-m}$ ונקבל

$$(1-m)y^{-m}y' + (1-m)a(x)y^{1-m} = (1-m)b(x) \quad (1)$$

נציב $z = y^{1-m}$ ונבל $z' = (1-m)y^{-m}y'$ כלומר נוכל להציג את המשוואה (1) כמשוואה לינארית של z

$$z' + (1-m)a(x)z = (1-m)b(x)$$

משוואה זו נוכל לפתור כבר בכלים שיש למשוואה דיפרנציאלית לינארית מסדר ראשון¹ ונקבל (בהנחה ש- $a(x), b(x)$ רציפות ו- $A(x)$ היא פונקציה קדומה של $a(x)$)

$$z = (1-m)e^{-(1-m)A(x)} \int^x e^{(1-m)A(t)} b(t) dt + C$$

נציב בחזרה במשוואה ונבקבל כי

$$y^{1-m} = (1-m)e^{-(1-m)A(x)} \int^x e^{(1-m)A(t)} b(t) dt + C$$

ומכאן נוכל לבדוד את y בקלות.

¹ראה: "משוואה דיפרנציאלית לינארית מסדר ראשון", גיא רוטנברג, סיכומנה - אתר הסיכומים החופשי <http://www.sikumuna.co.il>

2 דוגמאות

דוגמא 1 פתור את המשוואה $y' + 3y = 3y^{-2}$
 זוהי משוואת ברנולי, וכמו כן ניתן לשים לב ש- $y \equiv 0$ אינו פתרון שלה. לכן נחלק את המשוואה ב- $3y^{-2}$ ונקבל

$$3y^2 y' + 9y^3 = 9$$

נציב $z' = 3y^2 y'$, $z = y^{1-(-2)} = y^3$ ונקבל

$$z' + 9z = 9$$

נפתור את המשוואה הלינארית מסדר ראשון שהתקבל ונקבל כי

$$\begin{aligned} (e^{9x} z)' &= 9e^{9x} \\ e^{9x} z &= \int^x 9e^{9t} + C = e^{9x} + C \\ z &= 1 + Ce^{-9x} \end{aligned}$$

נציב חזרה את y במשוואה ונקבל

$$\begin{aligned} y^3 &= 1 + Ce^{-9x} \\ y &= \sqrt[3]{1 + Ce^{-9x}} \end{aligned}$$

ובכך קיבלנו את פתרון המשוואה.

דוגמא 2 פתור את המשוואה $y' = y^2$
 במקרה זה $y \equiv 0$ הוא פתרון של המשוואה. נמצא את שאר הפתרונות. נכפול את המשוואה ב- $-y^{-2}$ ונקבל

$$-y^{-2} y' = -1$$

נציב $z' = -y^{-2} y'$, $z = y^{1-2} = y^{-1}$ ונקבל

$$\begin{aligned} z' &= -1 \\ z &= -x + C \end{aligned}$$

הצבה מחדש של y במשוואה תניב

$$\begin{aligned} y^{-1} &= -x + C \\ y &= \frac{1}{-x + C} \end{aligned}$$

ובצירוף $y \equiv 0$ נקבל את אוסף כל הפתרונות של המשוואה.

דוגמא 3 פתור את המשוואה $y' + 3y = 3xy^{2/3}$ זוהי משוואת ברנולי כאשר $m = \frac{2}{3}$. ניתן לראות כי $y \equiv 0$ פותר את המשוואה. נחפש את הפתרונות האחרים של המשוואה. נכפול את שני אגפי המשוואה ב- $\frac{1}{3}y^{-2/3}$ ונקבל

$$\frac{1}{3}y^{-2/3}y' + y^{1/3} = x$$

נציב $z' = \frac{1}{3}y^{-2/3}$, $z = y^{1-(2/3)} = y^{1/3}$ ונקבל

$$\begin{aligned} z' + z &= x \\ e^x z' + e^x z &= x e^x \\ (e^x z)' &= x e^x \\ e^x z &= e^x (x - 1) + C \\ z &= x - 1 + C e^{-x} \end{aligned}$$

הצבה מחדש של y בתוצאה תשיג לנו את הפתרונות המבוקשים

$$\begin{aligned} y^{1/3} &= x - 1 + C e^{-x} \\ y &= (x - 1 + C e^{-x})^3 \end{aligned}$$

אם נוסיף לפתרונות שקיבלנו את הפתרון $y \equiv 0$ נקבל את אוסף כל הפתרונות של המשוואה.