הוכחה למשפט I.84 ב' באינפי' I של האו"פ

גיא רוטנברג

נובמבר 2006

משפט I.84 ב'

אם מתקיים $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ וגם $\lim_{x\to x_0} g(x) = \infty$ אז מתקיים

$$\lim_{x\to x_0} (f-g)(x) - \infty$$

הוכחה

יהי $M > 0$. כיוון שמתקיים $\lim_{x\to x_0} g(x) = \infty$ קיים $\delta_1 > 0$ כך שלכל x המקיים $0 < |x - x_0| < \delta_1$ מתקיים

$$g(x) > \max\{0, M+L+1\} \geq M+L+1$$

כלומר קיבלנו כי לכל $0 < |x - x_0| < \delta_1$ מתקיים

$$g(x) > M+L+1$$

כמו כן נתון לנו כי $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ ולכן קיים $\delta_2 > 0$ כך שלכל x המקיים $0 < |x - x_0| < \delta_2$ מתקיים

$$\begin{aligned} |f(x) - L| &< 1 \\ f(x) &< L+1 \end{aligned}$$

נסמן $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ לכן $\delta \leq \delta_1$ וגם $\delta \leq \delta_2$ ולכן לכל x המקיים $0 < |x - x_0| < \delta$ מתקיים גם $0 < |x - x_0| < \delta_1$ וגם $0 < |x - x_0| < \delta_2$ ולכן עבור כל x כזה יתקיים

$$\begin{aligned} g(x) &> M+L+1 \\ f(x) &< L+1 \end{aligned}$$

מכאן שמתקיים

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) < L+1-(M+L+1) = -M$$

כלומר הראיתי כי לכל $0 < M$ ניתן למצוא $0 < \delta$ כך שלכל x כך ש־$0 < |x - x_0| < \delta$ מתקיים $(f - g)(x) < -M$ ולכן מתקיים לפי הגדרת הגבול

$$\lim_{x \to x_0} (f - g)(x) = -\infty$$

וסיימנו את ההוכחה. ■
