

אוסף משוואות פתורות באלגברה

גיא רוטנברג <http://www.sikumuna.co.il>

סיכומונה - אתר הסיכומים החופשי

תוכן עניינים

1	משוואות ריבועיות	1
1.1	שימוש בטרינום	1.1
1.1.1	$x^2 + 4x - 12 = 0$	1.1.1
1.1.2	$4x^2 - 52x + 160 = 0$	1.1.2
1.1.3	$2x^2 + 15x + 28 = 0$	1.1.3
1.2	נוסחת השורשים	1.2
1.2.1	$x^2 - x - 1 = 0$	1.2.1
1.2.2	$2x^2 + 9x + 7 = 0$	1.2.2
1.3	תרגילים כלליים	1.3
1.3.1	$\frac{10}{x} + 9 = x$	1.3.1
1.3.2	$\frac{9}{x-3} = \frac{1}{x^2-9} + \frac{x}{x+3}$	1.3.2
1.3.3	$\frac{x^2+3}{x^2+3x+2} = \frac{x}{2x+2} + \frac{1}{x+2}$	1.3.3
א'	הוכחת נוסחת השורשים	

תקציר

בקובץ זה תמצאו מבחר דוגמאות לפתרון משוואות מסוגים שונים באלגברה. אני מקווה שתמצאו אותם לעזר.

1 משוואות ריבועיות

1.1 שימוש בטרינום

על מנת לפתור טרינום עלינו לדעת לפרק את המשוואה הריבועית בצורה מסויימת. לא תמיד קל לראות את הדרך לפירוק לכן משתמשים בטרינום רק כאשר ניתן לראות במהירות את הפירוק. אם לא ניתן לראות במהירות את הפירוק עדיף להשתמש בנוסחת השורשים.

אז איך לפרק לפי טרינום? נסתכל על המשוואה הריבועית

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (1)$$

אנו מחפשים דרך לפרק את bx לשני גורמים: αx ו- βx , כך שיתקיים: $\alpha + \beta = b$ וגם $\alpha\beta = ac$. במקרה זה נוכל לכתוב את המשוואה (1) כך:

$$ax^2 + \alpha x + \beta x + c = 0$$

וכעת לכנס איברים לפי קבוצות.
במקרה ש- $a = 1$ הפירוק לקבוצות הוא מיידי ונוכל לפרק ישיר את (1) כך:

$$(x + \alpha)(x + \beta) = 0$$

ולקבל את הפתרונות. בכל מקרה לאחר כינוס האיברים לפי קבוצות יתקבלו שני הפתרונות של המשוואה.

$$x^2 + 4x - 12 = 0 \quad (1.1.1)$$

על ידי שימוש בטרינום נקבל:

$$(x + 6)(x - 2) = 0$$

ומכאן נקבל ש- $x = 2$ או $x = -6$

$$4x^2 - 52x + 160 = 0 \quad (1.1.2)$$

תחילה נוציא גורם משותף ואז נשתמש בטרינום.

$$4(x^2 - 13x + 40) = 0$$

$$4(x - 5)(x - 8) = 0$$

ומכאן נקבל כי $x = 5$ או $x = 8$

$$2x^2 + 15x + 28 = 0 \quad (1.1.3)$$

$$2x^2 + 15x + 28 = 0$$

$$2x^2 + 8x + 7x + 28 = 0$$

$$2x(x + 4) + 7(x + 4) = 0$$

$$(2x + 7)(x + 4) = 0$$

$$2(x + 3.5)(x + 4) = 0$$

וקיבלנו כי $x = -4$ או $x = -3.5$

1.2 נוסחת השורשים

לא תמיד קל לפרק את המשוואה לטריוויום כיוון שלא תמיד פשוט למצוא לאילו גורמים לפרק אותו. קיימת שיטה מעט ארוכה יותר אך בהרבה מקרים פשוטה יותר לפתרון משוואה ריבועית כל שהי מהצורה $ax^2 + bx + c = 0$. במקרה זה פתרונות המשוואה נתונים על ידי נוסחת השורשים¹:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x^2 - x - 1 = 0 \quad 1.2.1$$

נשתמש בנוסחאת השורשים ונקבל:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 1}}{2} \\ x_{1,2} &= \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

$$\text{כלומר } x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ או } x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$2x^2 + 9x + 7 = 0 \quad 1.2.2$$

נפתור את המשוואה בעזרת נוסחת השורשים.

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-9 \pm \sqrt{9^2 - 4 \cdot 2 \cdot 7}}{2 \cdot 2} \\ x_{1,2} &= \frac{-9 \pm \sqrt{25}}{4} \\ x_{1,2} &= \frac{-9 \pm 5}{4} \end{aligned}$$

$$x = \frac{-9-5}{4} = -3.5 \text{ או } x = \frac{-9+5}{4} = -1$$

כלומר קיבלנו כי $x = -1$ או $x = -3.5$

1.3 תרגילים כלליים

בחלק זה יובאו תרגילים המשלבים את השיטות שהוצגו ממקודם וברמות גבוהות יותר.

¹ניתן להוכיח את נוסחת השורשים על ידי שימוש בנוסחאת וייטה.

$$\frac{10}{x} + 9 = x \quad 1.3.1$$

$$\begin{aligned} \frac{10}{x} + 9 &= x \\ 10 + 9x &= x^2 \\ -x^2 + 9x + 10 &= 0 \\ x_{1,2} &= \frac{-9 \pm \sqrt{9^2 - 4 \cdot 10 \cdot (-1)}}{-2} = \frac{-9 \pm \sqrt{121}}{-2} \\ x_1 = -1 & \quad x_2 = 10 \end{aligned}$$

$$\frac{9}{x-3} = \frac{1}{x^2-9} + \frac{x}{x+3} \quad 1.3.2$$

$$\begin{aligned} \frac{9}{x-3} &= \frac{1}{x^2-9} + \frac{x}{x+3} \\ 9(x+3) &= 1 + x(x-3) \\ 9x + 27 &= 1 + x^2 - 3x \\ x^2 - 12x - 26 &= 0 \\ (x-13)(x+1) &= 0 \\ x_1 = 13 & \quad x_2 = -1 \end{aligned}$$

$$\frac{x^2+3}{x^2+3x+2} = \frac{x}{2x+2} + \frac{1}{x+2} \quad 1.3.3$$

$$\begin{aligned} \frac{x^2+3}{x^2+3x+2} &= \frac{x}{2x+2} + \frac{1}{x+2} \\ \frac{x^2+3}{(x+2)(x+1)} &= \frac{x}{2(x+1)} + \frac{1}{x+2} \\ 2(x^2+3) &= x(x+2) + 2(x+1) \\ 2x^2 + 6 &= x^2 + 2x + 2x + 2 \\ x^2 - 4x + 3 &= 0 \\ (x-1)(x-3) &= 0 \\ x_1 = 1 & \quad x_2 = 3 \end{aligned}$$

א' הוכחת נוסחת השורשים

תהי $ax^2 + bx + c = 0$ משוואה ריבועית כלשהי נסמן ב- x_1, x_2 את הפתרונות של המשוואה (אם קיימים כאלה, ייתכן גם ששניהם שווים כלומר קיים פתרון יחיד). אלו

גם הפתרונות של המשוואה $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ וכיוון שאלו פתרונות המשוואה והמקדם של x^2 הוא אחד מתקיים $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = (x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2) + x_1x_2$ ומכאן נקבל כי:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \quad (2)$$

$$x_1x_2 = \frac{c}{a} \quad (3)$$

שתי משוואות אלו ידועות כנוסחאות וייטה ועליהן מתבססת ההוכחה. נניח ללא הגבלת הכלליות כי $x_2 \leq x_1$ מתקיים:

$$\begin{aligned} \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} &= \frac{-b}{2a} + \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{4ac}{4a^2}} = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) + \sqrt{\frac{1}{4} \left[\left(\frac{-b}{a} \right)^2 - 4 \frac{a}{c} \right]} \\ &= \frac{1}{2}(x_1 + x_2) + \frac{1}{2} \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} \\ &= \frac{1}{2}(x_1 + x_2) + \frac{1}{2} \sqrt{x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 4x_1x_2} \\ &= \frac{1}{2}(x_1 + x_2) + \frac{1}{2} \sqrt{x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2} \\ &= \frac{1}{2}(x_1 + x_2) + \frac{1}{2} \sqrt{(x_1 - x_2)^2} \\ &= \frac{1}{2}(x_1 + x_2) + \frac{1}{2}(x_1 - x_2) \\ &= x_1 \end{aligned}$$

באופן דומה נפתח את המקרה שבו מחסרים את השורש:

$$\begin{aligned} \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} &= \frac{-b}{2a} - \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{4ac}{4a^2}} = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) - \sqrt{\frac{1}{4} \left[\left(\frac{-b}{a} \right)^2 - 4 \frac{a}{c} \right]} \\ &= \frac{1}{2}(x_1 + x_2) - \frac{1}{2} \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} \\ &= \frac{1}{2}(x_1 + x_2) - \frac{1}{2} \sqrt{x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 4x_1x_2} \\ &= \frac{1}{2}(x_1 + x_2) - \frac{1}{2} \sqrt{x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2} \\ &= \frac{1}{2}(x_1 + x_2) - \frac{1}{2} \sqrt{(x_1 - x_2)^2} \\ &= \frac{1}{2}(x_1 + x_2) - \frac{1}{2}(x_1 - x_2) \\ &= x_2 \end{aligned}$$

ובזאת הוכחנו שנוסחת השורשים אכן נכונה ונותנת את פתרונות המשוואה.