

טענות:

1. תוחלת של פונקציה של X ו- Y . נניח כי $g(x, y)$ היא פונקציה ממשית של x ו- y .

$$E[g(X, Y)] = \sum_y \sum_x g(x, y) p_{X,Y}(x, y) \quad \text{אם } X \text{ ו-} Y \text{ יש פונקציית הסתברות משותפת } p_{X,Y}, \text{ אז:}$$

2. תוחלת של סכום משתנים מקריים

$$E[X_1 + X_2 + \dots + X_n] = E[X_1] + E[X_2] + \dots + E[X_n] \quad \text{אם } E[X_i] \text{ סופית לכל } i = 1, 2, \dots, n \text{ אז:}$$

הערה: הטענה במקרה האינסופי תקפה, אם כל ה- X_i הם משתנים מקריים אי-שליליים,

$$\text{או אם } \sum_{i=1}^{\infty} E[|X_i|] < \infty.$$

$$\text{השונויות המשותפת של } X \text{ ו-} Y \text{ מוגדרת על-ידי:} \quad \text{Cov}(X, Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])]$$

$$= E[XY] - E[X]E[Y]$$

אם $\text{Cov}(X, Y) = 0$ אז X ו- Y נקראים בלתי-מתואמים.

$$\text{1. תכונות השונויות המשותפת:} \quad \text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X)$$

$$\text{2.} \quad \text{Cov}(X, X) = \text{Var}(X)$$

$$\text{3.} \quad \text{Cov}(aX, Y) = a \text{Cov}(X, Y)$$

$$\text{4.} \quad \text{Cov}\left(\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{j=1}^m Y_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \text{Cov}(X_i, Y_j)$$

טענות: 1. אם X ו- Y משתנים מקריים בלתי-תלויים, אז לכל שתי פונקציות ממשיות g ו- h מתקיים:

$$E[g(X)h(Y)] = E[g(X)]E[h(Y)]$$

2. אם X ו- Y בלתי-תלויים זה בזה, אז הם בלתי-מתואמים (אך לא בהכרח להיפך).

שונויות של סכום סופי של משתנים מקריים

$$\text{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \text{Cov}\left(\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) + 2 \sum_{i < j} \text{Cov}(X_i, X_j) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) + \sum_{i \neq j} \text{Cov}(X_i, X_j)$$

$$\text{שונויות של סכום סופי של משתנים מקריים בלתי-תלויים} \quad \text{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i)$$

$$\text{מקדם המתאם של } X \text{ ו-} Y \text{ מוגדר על-ידי:} \quad \rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}}$$

טענות: 1. לכל X ו- Y מתקיים $-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$.

$$\text{2. אם } Y = aX + b \text{ אז } \rho(X, Y) = \begin{cases} 1 & , a > 0 \\ -1 & , a < 0 \end{cases}$$

אינדיקטור הוא משתנה מקרי שמקבל את הערכים 0 ו-1 בהסתברויות p ו- $1-p$ בהתאמה.

$$E[X] = p \quad ; \quad E[X^2] = p \quad ; \quad \text{Var}(X) = p(1-p) \quad : \text{מתקיים}$$

$$E[X_1 X_2] = P\{X_1 = 1, X_2 = 1\} \quad : \text{שנסמנו ב-} X_1 \text{ וב-} X_2 \text{ , מתקיים}$$

$$\text{Cov}(X_1, X_2) = P\{X_1 = 1, X_2 = 1\} - P\{X_1 = 1\}P\{X_2 = 1\} \quad : \text{ולכן}$$

תוחלת מותנית

אם X ו- Y יש פונקציית הסתברות משותפת אז **התוחלת המותנית של X בהינתן $Y=y$** מוגדרת,

$$E[X | Y = y] = \sum_x x P\{X = x | Y = y\} = \sum_x x \frac{P\{X = x, Y = y\}}{P\{Y = y\}} \quad : \text{על-ידי } P\{Y = y\} > 0$$

הערה: התוחלת המותנית של X בהינתן $Y=y$ היא פונקציה של הערך y .

$$E[X] = E[E[X | Y]] \quad : \text{תוחלת של תוחלת מותנית}$$

$$E[X] = \sum_y E[X | Y = y] P\{Y = y\} \quad - \text{כלומר, אם } Y \text{ משתנה מקרי בדיד אז}$$

אפשר להשתמש בטענה זו, כדי לחשב הסתברויות של מאורעות על-ידי התניה במשתנה מקרי.

$$P(E) = \sum_y P(E | Y = y) P\{Y = y\} \quad : \text{כלומר, אם } E \text{ מסמן מאורע כלשהו ואם } Y \text{ משתנה מקרי בדיד אז}$$

$$\text{Var}(X) = E[\text{Var}(X | Y)] + \text{Var}(E[X | Y]) \quad : \text{נוסחת השונות המותנית}$$

סכום מקרי

אם N הוא משתנה מקרי בדיד שערכיו שלמים וחיוביים, ואם $X_1, X_2, \dots, X_N$ הם משתנים מקריים שווי-התפלגות ובלתי-תלויים זה בזה וב- N , אז:

$$E\left[\sum_{i=1}^N X_i\right] = E[N] E[X_1]$$

$$\text{Var}\left(\sum_{i=1}^N X_i\right) = E[N] \text{Var}(X_1) + (E[X_1])^2 \text{Var}(N)$$

$$M_X(t) = E[e^{tX}] \quad : \text{הפונקציה יוצרת המומנטים של משתנה מקרי } X \text{ מוגדרת, לכל } t \text{ ממשי, על-ידי}$$

$$E[X^r] \quad : \text{המומנט מסדר } r \text{ של משתנה מקרי } X \text{ מוגדר על-ידי}$$

המומנט מסדר r של משתנה מקרי X מתקבל מהנגזרת ה- r -ית (לפי t) של $M_X(t)$ בנקודה $t=0$, אם הנגזרת קיימת בסביבת נקודה זו. כלומר, מתקיים השוויון:

$$M_X^{(r)}(t) \Big|_{t=0} = E[X^r]$$

פונקציות יוצרות מומנטים של התפלגויות מיוחדות

$X \sim B(n, p)$	$M_X(t) = (pe^t + 1 - p)^n$	, לכל t	משתנה מקרי בינומי :
$X \sim Po(\lambda)$	$M_X(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}$	, לכל t	משתנה מקרי פואסוני :
$X \sim Geo(p)$	$M_X(t) = \frac{pe^t}{1 - (1-p)e^t}$	, $t < -\ln(1-p)$	משתנה מקרי גיאומטרי :
$X \sim NB(r, p)$	$M_X(t) = \left(\frac{pe^t}{1 - (1-p)e^t} \right)^r$	, $t < -\ln(1-p)$	משתנה מקרי בינומי שלילי :
$X \sim U(a, b)$	$M_X(t) = \frac{e^{bt} - e^{at}}{t(b-a)}$	, לכל $t \neq 0$	משתנה מקרי אחיד :
$X \sim Exp(\lambda)$	$M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}$	, $t < \lambda$	משתנה מקרי מעריכי :
$X \sim N(0, 1)$	$M_X(t) = e^{t^2/2}$	, לכל t	משתנה מקרי נורמלי סטנדרטי :
$X \sim N(\mu, \sigma^2)$	$M_X(t) = e^{\mu t + \sigma^2 t^2/2}$	, לכל t	משתנה מקרי נורמלי :

טענות : 1. אם $Y = aX + b$, אז $M_Y(t) = M_{aX+b}(t) = e^{bt} M_X(at)$

2. אם $X_1, X_2, \dots, X_n$ הם משתנים מקריים בלתי-תלויים, אז $M_{\sum_{i=1}^n X_i}(t) = \prod_{i=1}^n M_{X_i}(t)$

3. קיימת התאמה חד-חד-ערכית בין הפונקציות יוצרות המומנטים לפונקציות ההתפלגות המצטברת. כלומר, אם הפונקציה יוצרת המומנטים של משתנה מקרי X קיימת וסופית בסביבה כלשהי של $t = 0$, אז ההתפלגות של X נקבעת באופן יחיד.

תוצאות : 1. סכום של n משתנים מקריים בינומיים בלתי-תלויים עם הפרמטרים n_i ו- p , לכל $i = 1, \dots, n$, הוא משתנה מקרי בינומי עם הפרמטרים $\sum n_i$ ו- p .

2. סכום של n משתנים מקריים פואסוניים בלתי-תלויים עם הפרמטרים λ_i , לכל $i = 1, \dots, n$, הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר $\sum \lambda_i$.

3. סכום של n משתנים מקריים גיאומטריים בלתי-תלויים שלכולם הפרמטר p , הוא משתנה מקרי בינומי שלילי עם הפרמטרים n ו- p .

4. סכום של n משתנים מקריים נורמליים בלתי-תלויים עם הפרמטרים μ_i ו- σ_i , הוא משתנה מקרי נורמלי עם הפרמטרים $\sum \mu_i$ ו- $\sum \sigma_i^2$.

יהיו $X_1, X_2, \dots, X_n$ משתנים מקריים בלתי-תלויים, שלכולם התפלגות F בעלת תוחלת μ ושונות σ^2 . נהוג לומר, שהמשתנים המקריים $X_1, X_2, \dots, X_n$ הם **מדגם מקרי** מהתפלגות F .

ממוצע המדגם הוא $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, ומתקיים: $E[\bar{X}] = \mu$ ו- $\text{Var}(\bar{X}) = \sigma^2/n$

שונות המדגם היא $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$, ומתקיים: $E[S^2] = \sigma^2$