

פרק 6: התפלגות משותפת של משתנים מקריים (סיכום) (20425)

אם X ו- Y הם משתנים מקריים בדידים, אז פונקציית ההסתברות המשותפת שלהם מוגדרת, לכל x ו- y

$$p_{X,Y}(x,y) = P\{X=x, Y=y\} \text{ , כאשר } \sum_{x,y} p_{X,Y}(x,y) = 1$$

את פונקציות ההסתברות השולית של X ושל Y , p_X ו- p_Y בהתאמה, אפשר לקבל מפונקציית ההסתברות

$$p_X(x) = \sum_y P\{X=x, Y=y\} = \sum_y p_{X,Y}(x,y) \quad \text{המשתפת של } X \text{ ו-} Y \text{ על-ידי:}$$

$$p_Y(y) = \sum_x P\{X=x, Y=y\} = \sum_x p_{X,Y}(x,y)$$

כאשר p_X ו- p_Y נקראות פונקציות ההסתברות השולית של X ושל Y , בהתאמה.

פונקציית ההתפלגות המצטברת המשותפת של משתנים מקריים X ו- Y מוגדרת, לכל a ו- b ממשיים, על-ידי:

$$F_{X,Y}(a,b) = P\{X \leq a, Y \leq b\} = \sum_{y: y \leq b} \sum_{x: x \leq a} p_{X,Y}(x,y)$$

$$F_X(a) = P\{X \leq a, Y < \infty\} = F_{X,Y}(a, \infty) \quad \text{ו-} \quad F_Y(b) = P\{X < \infty, Y \leq b\} = F_{X,Y}(\infty, b)$$

כאשר F_X ו- F_Y נקראות פונקציות ההתפלגות המצטברת השולית של X ושל Y , בהתאמה.

את כל האמור לעיל אפשר להכליל להתפלגות משותפת של n משתנים מקריים.

ההתפלגות המולטינומית: (התפלגות משותפת בדידה)

נאמר שלמשתנים המקריים הבדידים $X_1, X_2, \dots, X_r$ יש התפלגות משותפת מולטינומית, אם פונקציית

$$P\{X_1 = n_1, \dots, X_r = n_r\} = \frac{n!}{n_1! \dots n_r!} \cdot p_1^{n_1} \cdot \dots \cdot p_r^{n_r} \quad \text{ההסתברות המשותפת שלהם היא:}$$

כאשר $p_1, p_2, \dots, p_r$ מסמנים הסתברויות שסכומן 1, וכן $\sum_{i=1}^r n_i = n$ עבור n שלם וחיובי.

ניסוי מקרי מולטינומי: ניסוי מקרי המורכב מ- n חזרות בלתי-תלויות על ניסוי, בעל r תוצאות אפשריות שונות,

המתקבלות בהסתברויות $p_1, p_2, \dots, p_r$.

המשתנה המקרי X_i , לכל $i = 1, \dots, r$, מוגדר כמספר החזרות בניסוי המולטינומי שבהן מתקבלת התוצאה i .

המאורע $\{X_1 = n_1, \dots, X_r = n_r\}$ מתאר את מספר הפעמים שכל אחת מ- r התוצאות מתקבלת בניסוי המולטינומי.

הערות: 1. אם לווקטור המשתנים המקריים $\underline{X}$ יש התפלגות מולטינומית, מסמנים $\underline{X} \sim Mult(n, \underline{p})$.

2. אם $r = 2$ ההתפלגות המולטינומית אינה אלא התפלגות בינומית עם הפרמטרים (n, p_1) .

3. ההתפלגות השולית של כל X_i היא התפלגות בינומית עם הפרמטרים (n, p_i) , כאשר $i = 1, \dots, r$.

4. ההתפלגות של כל סכום $X_i + X_j$ היא התפלגות בינומית עם הפרמטרים $(n, p_i + p_j)$, כאשר $i \neq j$.

5. המשתנים המקריים $X_1, X_2, \dots, X_r$ תלויים זה בזה.

משתנים מקריים בלתי-תלויים

המשתנים המקריים הבדידים X ו- Y נקראים בלתי-תלויים אם לכל x ו- y ממשיים מתקיים:

$$p_{X,Y}(x, y) = p_X(x) p_Y(y)$$

$$F_{X,Y}(x, y) = F_X(x) F_Y(y)$$

ותנאי אי-תלות שקול הוא:

המשתנים המקריים הבדידים $X_1, X_2, \dots, X_n$ נקראים **בלתי-תלויים** אם לכל תת-קבוצה של r משתנים מקריים מתוכם ($r = 2, \dots, n$) ולכל r מספרים ממשיים $x_1, x_2, \dots, x_r$ מתקיים:

$$P\{X_{i_1} = x_1, \dots, X_{i_r} = x_r\} = P\{X_{i_1} = x_1\} \cdot \dots \cdot P\{X_{i_r} = x_r\}$$

$$P\{X_{i_1} \leq x_1, \dots, X_{i_r} \leq x_r\} = P\{X_{i_1} \leq x_1\} \cdot \dots \cdot P\{X_{i_r} \leq x_r\}$$

ותנאי אי-תלות שקול הוא:

הערה: יחס האי-תלות הוא יחס סימטרי. כלומר, אם X בלתי-תלוי ב- Y , אז כמובן Y בלתי-תלוי ב- X .

טענה (2.1): המשתנים המקריים הבדידים X ו- Y בלתי-תלויים אם ורק אם ניתן לרשום את פונקציית ההסתברות המשותפת שלהם $p_{X,Y}$ בצורה –

$$p_{X,Y}(x, y) = h(x) g(y), \quad \text{לכל } x \text{ ו-} y \text{ ממשיים}$$

טענה (דוגמה 2ב): אם מספר המופעים שמתרחשים במרווח-זמן נתון הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר λ , ואם תכונה מסוימת מתקיימת בכל אחד מהמופעים המתרחשים בהסתברות p , אז – מספר המופעים שמתקיימת בהם התכונה במרווח-הזמן הנתון הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר λp ; מספר המופעים שלא מתקיימת בהם התכונה במרווח-זמן זה הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר $\lambda(1-p)$; ושני המשתנים המקריים הפואסוניים האלו בלתי-תלויים זה בזה.

סכום של משתנים מקריים בדידים

יהיו X ו- Y משתנים מקריים בדידים. ההתפלגות של המשתנה המקרי $X + Y$ מתקבלת מאחת מן המשוואות

$$P\{X + Y = a\} = \sum_x P\{X = x, Y = a - x\} \quad \text{או} \quad P\{X + Y = a\} = \sum_y P\{X = a - y, Y = y\}, \quad \text{לכל } a \text{ ממשי.}$$

ואם X ו- Y בלתי-תלויים מקבלים כי $P\{X + Y = a\} = \sum_x P\{X = x\} P\{Y = a - x\} = \sum_y P\{X = a - y\} P\{Y = y\}$ לכל a ממשי.

טענות (סכום של משתנים מקריים בלתי-תלויים)

1. דוגמה 3א: אם X_i הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר λ_i לכל $i = 1, 2, \dots, n$, ואם $X_1, X_2, \dots, X_n$

$$\text{בלתי-תלויים זה בזה, אז } \sum_{i=1}^n X_i \text{ הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר } \sum_{i=1}^n \lambda_i.$$

(את המקרה הכללי, ל- n משתנים מקריים, מוכיחים באינדוקציה.)

2. דוגמה 3ב: אם X_i הוא משתנה מקרי בינומי עם הפרמטרים (n_i, p) לכל $i = 1, 2, \dots, n$, ואם $X_1, X_2, \dots, X_n$

$$\text{בלתי-תלויים זה בזה, אז } \sum_{i=1}^n X_i \text{ הוא משתנה מקרי בינומי עם הפרמטרים } \left(\sum_{i=1}^n n_i, p \right).$$

(את המקרה הכללי, ל- n משתנים מקריים, מוכיחים באינדוקציה.)

3. אם X_i הוא משתנה מקרי גיאומטרי עם הפרמטר p לכל $i = 1, 2, \dots, n$, ואם $X_1, X_2, \dots, X_n$ בלתי-תלויים זה בזה, אז $\sum_{i=1}^n X_i$ הוא משתנה מקרי בינומי שלילי עם הפרמטרים (n, p) .
(מוכיחים ישירות ל- $n = 2$, ואת המקרה הכללי מוכיחים באינדוקציה.)

התפלגויות מותנות

אם X ו- Y הם משתנים מקריים בדידים, פונקציית ההסתברות המותנית של X בתנאי $Y=y$ מוגדרת לכל y שעבורו $P\{Y=y\} > 0$ ולכל x ממשי על-ידי:

$$p_{X|Y}(x|y) = P\{X=x|Y=y\} = \frac{P\{X=x, Y=y\}}{P\{Y=y\}} \quad ; \quad \sum_x p_{X|Y}(x|y) = 1$$

הערה: אם X ו- Y בלתי-תלויים זה בזה מקבלים כי:

$$P\{X=x|Y=y\} = P\{X=x\}$$

$$P\{Y=y|X=x\} = P\{Y=y\}$$

כלומר, ההתפלגות המותנית של X בהינתן $Y=y$ אינה תלויה ב- y ושווה להתפלגות השולית של X (ולחיפך).
ובמילים אחרות, לערך הידוע של משתנה מקרי אחד אין השפעה על ההתפלגות של המשתנה המקרי השני.

פונקציית ההתפלגות המצטברת של X בתנאי $Y=y$ היא:

$$F_{X|Y}(a|y) = P\{X \leq a|Y=y\} = \sum_{x: x \leq a} P\{X=x|Y=y\}$$

טענה (דוגמה 4ב): אם X ו- Y הם משתנים מקריים פואסוניים בלתי-תלויים עם הפרמטרים λ_1 ו- λ_2 , בהתאמה, אז ההתפלגות של המשתנה המקרי המותנה X בהינתן $X+Y=n$ היא בינומית עם הפרמטרים

$$n \text{ ו- } \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$$