

פרק 4: משתנים מקריים בדידים (סיכום) (20425)

משתנה מקרי (מ"מ): פונקציה שערכיה ממשיים, המוגדרת על מרחב המדגם של ניסוי מקרי. כלומר, פונקציה המתאימה לכל תוצאה אפשרית של ניסוי מקרי מספר ממשי כלשהו.

משתנה מקרי בדיד: משתנה מקרי שקבוצת ערכיו האפשריים סופית או אינסופית בת-מניה.

פונקציית ההסתברות של משתנה מקרי בדיד: אם X משתנה מקרי בדיד המקבל את הערכים $x_1, x_2, \dots$, אז הפונקציה $p(x_i) = P\{X=x_i\}$ נקראת פונקציית ההסתברות של X , ומתקיים $\sum_i P\{X=x_i\}=1$.

פונקציית ההתפלגות המצטברת של משתנה מקרי בדיד: $F(x) = P\{X \leq x\} = \sum_{i: x_i \leq x} P\{X=x_i\}$. לגרף של פונקציית ההתפלגות המצטברת של משתנה מקרי בדיד, יש צורה של פונקציית מדרגות.

תוחלת: התוחלת של X מסומנת ב- $E[X]$, ומוגדרת על-ידי $E[X] = \sum_i x_i P\{X=x_i\}$.

תוחלת של פונקציה של משתנה מקרי:

אם $g(x)$ היא פונקציה ממשיית המוגדרת לכל הערכים האפשריים של X , אז $E[g(X)] = \sum_i g(x_i) P\{X=x_i\}$.

שונות: השונות של X מסומנת ב- $\text{Var}(X)$, ומוגדרת ע"י $\text{Var}(X) = E[(X - E[X])^2] = \sum_i (x_i - E[X])^2 P\{X=x_i\}$.

אפשר להראות שמתקיים $\text{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = \sum_i x_i^2 P\{X=x_i\} - (E[X])^2$. השונות שווה לאפס אך ורק כאשר ל- X יש ערך אפשרי יחיד.

סטיית-תקן: סטיית התקן של X היא השורש החיובי של שונותו. סימון: $\text{SD}(X)$ או σ_X .

התוחלת מקיימת את השוויון $E[aX + b] = aE[X] + b$.

השונות מקיימת את השוויון $\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X)$.

סטיית התקן מקיימת את השוויון $\text{SD}(aX + b) = |a| \text{SD}(X)$.

תוחלת של משתנה מקרי אי-שלילי: אם X הוא משתנה מקרי שערכיו שלמים אי-שליליים, אפשר למצוא את

תוחלתו באמצעות השוויון $E[X] = \sum_{i=1}^{\infty} P\{X \geq i\}$.

משתנים מקריים מיוחדים

ניסוי מקרי ברנולי: ניסוי בעל שתי תוצאות אפשריות, "הצלחה" בהסתברות p ו"כשלון" בהסתברות $1-p$.

משתנה מקרי גיאומטרי: $X \sim \text{Geo}(p)$ $0 < p < 1$

$P\{X=i\} = (1-p)^{i-1} \cdot p$ $i = 1, 2, 3, \dots$

$E[X] = \frac{1}{p}$ $\text{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}$

ניסוי מקרי גיאומטרי: עורכים בזה אחר זה, ניסויי ברנולי בלתי-תלויים, שלכולם הסתברות p להצלחה, עד לקבלת ההצלחה הראשונה.

המשתנה המקרי X מוגדר כמספר הניסויים שבו התקבלה ההצלחה הראשונה.

$X \sim B(n, p)$	n טבעי ו- $0 < p < 1$	משתנה מקרי בינומי:
$P\{X = i\} = \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot (1-p)^{n-i}$	$i = 0, 1, \dots, n-1, n$	
$E[X] = np$	$\text{Var}(X) = np(1-p)$	

ניסוי מקרי בינומי: ניסוי המורכב מ- n ניסויי ברנולי בלתי-תלויים, שלכולם אותה הסתברות p להצלחה. המשתנה המקרי X מוגדר כמספר ההצלחות בניסוי מקרי בינומי.

$X \sim Po(\lambda)$	$\lambda > 0$	משתנה מקרי פואסוני:
$P\{X = i\} = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^i}{i!}$	$i = 0, 1, 2, \dots$	
$E[X] = \lambda$	$\text{Var}(X) = \lambda$	

המשתנה המקרי X מוגדר כמספר המופעים המתרחשים ביחידת זמן נתונה (בהתאם להנחות של תהליך פואסון). λ הוא קצב התרחשות המופעים ביחידת זמן אחת. במרווח זמן שאורכו t קצב התרחשות המופעים הוא λt . משתנים מקריים פואסוניים המוגדרים על רווחי זמן שאינם חופפים, הם בלתי-תלויים.

הקירוב הפואסוני לבינומי:

אם $X \sim B(n, p)$ כך ש- n גדול ו- p קטן, אז לכל $i = 0, 1, \dots, n$ מתקיים

$$P\{X = i\} \approx e^{-np} \frac{(np)^i}{i!}$$

$X \sim NB(r, p)$	r טבעי ו- $0 < p < 1$	משתנה מקרי בינומי שלילי:
$P\{X = i\} = \binom{i-1}{r-1} (1-p)^{i-r} \cdot p^r$	$i = r, r+1, r+2, \dots$	
$E[X] = \frac{r}{p}$	$\text{Var}(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}$	

ניסוי מקרי בינומי שלילי: עורכים בזה אחר זה, ניסויי ברנולי בלתי-תלויים, שלכולם הסתברות p להצלחה, עד לקבלת ההצלחה ה- r . ניסוי זה הוא למעשה רצף של r ניסויים מקריים גיאומטריים בלתי-תלויים.

המשתנה המקרי X מוגדר כמספר הניסויים שבו התקבלה ההצלחה ה- r . ית.

$X \sim H(N, m, n)$	$N \geq n, m$ ו- n, m טבעיים	משתנה מקרי היפרגיאומטרי:
$P\{X = i\} = \frac{\binom{m}{i} \binom{N-m}{n-i}}{\binom{N}{n}}$	$i = \max\{0, n-(N-m)\}, \dots, \min\{m, n\}$	
$E[X] = \frac{nm}{N}$	$\text{Var}(X) = \frac{N-n}{N-1} n \frac{m}{N} (1 - \frac{m}{N})$	

ניסוי מקרי היפרגיאומטרי: בוחרים מדגם מקרי בגודל n מתוך N עצמים ש- m מהם מיוחדים.

המשתנה המקרי X מוגדר כמספר העצמים המיוחדים שהוצאו במדגם המקרי.