

פרק 3: הסתברות מותנית ואי-תלות (סיכום) (20425)

הסתברות מותנית:

יהיו A ו- B שני מאורעות במרחב מדגם S , כך שמתקיים $P(B) > 0$. ההסתברות שהמאורע A יתרחש, אם ידוע שהמאורע B מתרחש, נקראת ההסתברות (המותנית) של A בתנאי B , מסומנת ב- $P(A|B)$, ומוגדרת על-ידי –

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B) \quad \text{לכן –}$$

נוסחת הכפל:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

נוסחת ההסתברות השלמה:

יהי A מאורע במרחב מדגם S ויהיו $B_1, B_2, \dots, B_n$ מאורעות זרים ב- S , המקיימים $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n = S$ אז –

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \dots + P(A \cap B_n) \\ &= P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \dots + P(A|B_n)P(B_n) \end{aligned}$$

נוסחת בייס:

יהי A מאורע במרחב מדגם S ויהיו $B_1, B_2, \dots, B_n$ מאורעות זרים ב- S , המקיימים $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n = S$ אז –

$$P(B_j|A) = \frac{P(B_j \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A|B_j)P(B_j)}{P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \dots + P(A|B_n)P(B_n)}$$

מאורעות בלתי-תלויים:

יהיו A ו- B מאורעות במרחב מדגם S .

A ו- B ייקראו בלתי-תלויים, אם מתקיים תנאי האי-תלות –

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

יהיו $A_1, A_2, \dots, A_n$ מאורעות במרחב מדגם S .

$A_1, A_2, \dots, A_n$ ייקראו בלתי-תלויים, אם לכל תת-קבוצה $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_r}$ שלהם מתקיים תנאי האי-תלות –

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_r}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_r})$$

יהיו $A_1, A_2, \dots$ מאורעות במרחב מדגם S .

$A_1, A_2, \dots$ ייקראו בלתי-תלויים, אם המאורעות בכל תת-קבוצה סופית שלהם בלתי-תלויים.

מאורעות בלתי-תלויים בתנאי:

יהיו A_1, A_2 ו- B מאורעות במרחב מדגם S .

– A_1 ו- A_2 ייקראו בלתי-תלויים בתנאי B , אם מתקיים תנאי האי-תלות

$$P(A_1 \cap A_2 | B) = P(A_1 | B)P(A_2 | B)$$

טענות:

1. אם A ו- B בלתי-תלויים, אז A ו- B^C בלתי-תלויים, A^C ו- B בלתי-תלויים, A^C ו- B^C בלתי-תלויים. אפשר להכליל טענה זו ל- n מאורעות.

2. אם A ו- B מאורעות זרים של אותו ניסוי מקרי, אז בחזרות בלתי-תלויות על ניסוי זה, המאורע A יתרחש

$$\text{לפני המאורע } B, \text{ בהסתברות } \frac{P(A)}{P(A) + P(B)}.$$

3. $P(\cdot | B)$, כאשר B מאורע במרחב מדגם S המקיים $P(B) > 0$, היא פונקציית ההסתברות לכל דבר, כלומר היא מקיימת את שלושת אקסיומות ההסתברות:

א. לכל מאורע A במרחב המדגם S מתקיים $0 \leq P(A|B) \leq 1$

ב. $P(S|B) = 1$

ג. לכל סדרה של מאורעות זרים $A_1, A_2, \dots$ במרחב המדגם S מתקיים $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \mid B\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i | B)$

4. נוסחת ההסתברות השלמה למאורעות מותנים:

אם $B_1, B_2, \dots, B_n$ מאורעות זרים (כלומר, החיתוך שלהם הוא מאורע ריק) וכוללים (כלומר, האיחוד שלהם שווה למרחב המדגם) ואם C הוא מאורע המקיים $P(C) > 0$, אז –

$$P(A|C) = P(A|B_1 \cap C)P(B_1|C) + P(A|B_2 \cap C)P(B_2|C) + \dots + P(A|B_n \cap C)P(B_n|C)$$