בדיקת התכנסות במידה שווה לסדרות של פונקציות

גיא רוטנברג

אוגוסט 2006

1 בדיקת התכנסות במידה שווה

אם נתונה לנו סדרת פונקציות$(f_n(x))$המוגדרת בקטע D. איך נדע האם היא מתכנסת במידה שווה (במ"ש) ב־ D?

הבדיקה להתכנסות במ"ש מתחלקת לשלושה שלבים.

1.1 שלב ראשון

נמצא תחילה את הפונקציה הגבולית, כלומר פונקציה $f(x)$ שתקיים $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ לכל $x \in D$. אם לא לכל $x \in D$ הגבול קיים אז, כמובן אין התכנסות במ"ש בקטע D.

1.2 שלב שני

1. אם $f_n(x)$ רציפות D ו־ $f(x)$ לא רציפה ב־ D אז אין התכנסות במ"ש ב־ D(זה נובע מהמשפט אודות הרציפות של הפונקציה הגבולית[1]).
2. אם קיימת סדרת *מספרים* $a_n \to 0$ כך ש־ $|f_n(x) - f(x)| \le a_n$עבור כל $x \in D$ אז הסדרה מתכנסת במ"ש ב־ D, זה נובע מהגדרה של התכנסות במ"ש.
3. אם קיימת סדרת נקודות $(x_n) \subset D$ כך ש־ $|f_n(x) - f(x)| \nrightarrow 0$ אז אין התכנסות במ"ש ב־ D. זה נובע מהגדרה של התכנסות במ"ש, ראה גם משפט XI.3 בספר של האו"פ.

1.3 שלב שלישי

אם לא הצלחנו לקבל תשובה בעזרת סעיפים 1־3 של השלב השני אז נחשב את

$$c_n = \sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)|$$

וכיוון שלכל$x \in D$ מתקיים$|f_n(x) - f(x)| \le \sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)|$אז לפי משפט XI.3 בספר אינפי 2 של האו"פ (או לפי הגדרה בדומה לסעיף 3 בשלב השני) נקבל ש־$(f_n(x))$מכנסת במ"ש ב־ D *אם ורק אם* $c_n \to 0$.

[1] משפט XI.4 בספר אינפי 2 של האו"פ ומשפט 3 עמוד 365 בספר חשבון אינפיניטסימלי של מייזלר