

מהי קבוצה?

1. קבוצה היא שם כללי לתיאור אוסף כלשהו של איברים.

2. קבוצה היא מושג יסודי במתמטיקה. התיאור האינטואיטיבי של קבוצה הוא אוסף של עצמים כלשהם. העצמים הנמצאים בקבוצה הם איברי הקבוצה. נהוג להציג קבוצה באמצעות סוגריים מסולסלים, שבתוכם מפורטים כל איברי הקבוצה, או מופיע כלל לפיו נוצרים כל איברי הקבוצה. לעתים מוצגת הקבוצה באמצעות רשימה של חלק מאיבריה שבסופם '...' (שלוש נקודות), מתוך הנחה שהקורא הנבון יבין מהם יתר איברי הקבוצה.

לפעמים נשתמש גם בסימון נוסף בתוך הסוגריים לצורך קיצור הכתיבה:
הסימון הוא כדלקמן:

$\{x \text{ מספר גדול מ-} 1\}$ – בקבוצה זו נמצאים כל המספרים הגדולים מ 1.

הנה כמה דוגמאות של קבוצות ואיבריהן:

- **{כלב, חתול, ארנב}** – בקבוצה זו 3 איברים.
- **{א, ב, ג, ד, ..., ק, ר, ש, ת}** – בקבוצה זו 22 איברים (22 האותיות העיבריות, ללא סופיות).
- **{אזרחי ישראל}** – בקבוצה זו נמצאים כל תושבי ישראל.

ניתן לחלק את הקבוצות לשתי קבוצות עיקריות:

- (1) **קבוצות סופיות.**
- (2) ***קבוצות אינסופיות.**

- דוגמא לקבוצה סופית:

$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ – בקבוצה זו 9 איברים.

- דוגמא לקבוצה אינסופית:

$\{n \text{ כל המספרים שגדולים מ-} 9\}$

קבוצה נוספת שנעשה בה שימוש היא הקבוצה הריקה:

הקבוצה הריקה היא קבוצה ללא איברים ($\{ \}$) ומוסומנת באות $\emptyset$.

שייכות

נאמר כי איבר x כלשהו שייך לקבוצה A אם x הוא אחד מאיברי הקבוצה.

לדוגמא:

תהי הקבוצה A : {עמיחי,בן,גיא,רן,יגיל}.

נגיד כי 'עמיחי' הוא איבר בקבוצה ונסמן זאת בצורה הבאה: $\text{עמיחי} \in A$.

הסימן $\in$ אומר כי האיבר שייך לקבוצה.

דוגמא 2:

תהי B קבוצת כל המספרים הזוגיים הטבעיים (נסביר בהמשך) :
 $B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots\}$, נגיד כי $n=3$ אינו איבר בקבוצה B מכיוון שאיננו זוגי.
נסמן זאת כך: $n \notin B$.

קבוצות חלקיות

תהי A קבוצה: {תלמידי תיכון עירוני ד' ת"א},
ותהי B קבוצה: {תלמידי כיתת המחוננים בעירוני ד' ת"א}.

הגדרה: שיויון בין קבוצות.

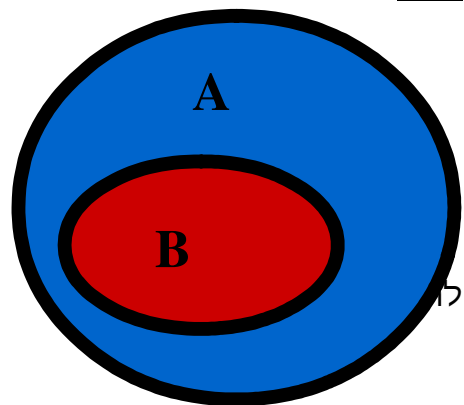
תהיינה A ו B שתי קבוצות, נגיד כי B שווה ל A אם
כל איבר ב B הוא גם איבר ב A ולהפך.

ברור לנו ע"פ ההגדרה כי $A \neq B$ אמנם כל תלמידי כיתות המחוננים בעירוני ד'
הם תלמידים בעירוני ד' אבל לא כל תלמידי תיכון עירוני ד' בת"א לומדים
בכיתות המחוננים.

אבל אנו מבינים כי קיים קשר מסויים בין הקבוצות A ו B .
נוכל להגיד כי B חלקית ל A .

נסמן $B \subseteq A$ קרי: הקבוצה B חלקית לקבוצה A .

ציור:



: הקבוצה B מוכלת ב-A, ולכן חלקית

הגדרה (קבוצות חלקיות):

תהיינה A ו B שתי קבוצות, נגיד כי B חלקית ל A אם כל איבר של B הוא גם איבר של A.

משפט:

כל קבוצה חלקית לעצמה.

קבוצה חלקית ממש:

נגיד כי קבוצה A חלקית ממש ל B אם A חלקית ממש ל B אבל לא שווה (כל איברי A הם גם איברים ב B אבל קיים ב B איבר אחד **לפחות** שלא קיים ב A).

הגדרה (קבוצות חלקיות ממש):

תהיינה A ו B שתי קבוצות, נגיד כי A חלקית ממש ל B אם כל איבר של A הוא גם איבר של B, וגם לא כל איבר של B הוא איבר של A.

דוגמא:

תהי A קבוצה: $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ ותהי B קבוצה: $B = \{1, 2, 3\}$.
נגיד ש B חלקית ממש A מכיוון שכל איברי B הם גם איברי A וגם לא כל
איברי A הם איברים של B (לדוגמא הסיפרה 4, 4 אינו איבר של B).

נסמן A חלקית ממש B בצורה הבאה: $A \subset B$.

שוויון עצמות של קבוצות

שיטות להשוואת מספר האיברים בשתי קבוצות:

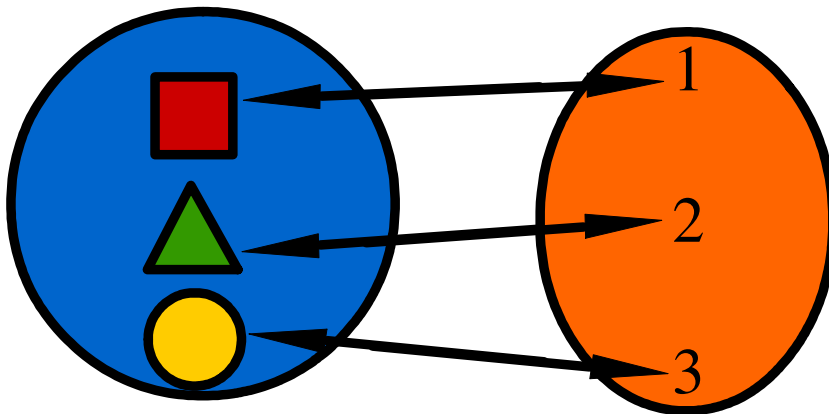
השיטה הטבעית להשוואת מספר האיברים בין שתי קבוצות נתונות הוא לספור
את מספר האיברים בכל קבוצה ולבדוק האם מספר האיברים שהתקבל
בקבוצה אחת שווה למספר האיברים בקבוצה השנייה.

שיטת הספירה מוגבלת לקבוצות סופיות. כאשר מדובר בקבוצות אינסופיות, אי
אפשר להשוות את מספר האיברים שבהן ע"י ספירה.
אם נתחיל לספור את איברי קבוצה אינסופית אחת – לא נוכל לסיים, ולא נגיע
לשלב של ספירת איברי הקבוצה השנייה.

לעומת זאת, לפחות באופן עקרוני נוכל להשתמש בשיטה הנקראת "**התאמה
חד חד ערכית**" (או בקיצור חח"ע).

בשיטה זו אנו מתאימים כל איבר בקבוצה אחת לאיבר מקביל בקבוצה השנייה.
בסופו של דבר אם לכל איבר בקבוצה הראשונה מותאם איבר אחד ויחיד
בקבוצה השנייה, ולכל איבר בקבוצה השנייה מותאם איבר אחד ויחיד בקבוצה
הראשונה.

דוגמא:



בקבוצה הכחולה ישנם שלושה איברים: {ריבוע אדום, משולש ירוק, עיגול צהוב}.

בקבוצה הכתומה ישנם גם שלושה איברים, המספרים 1, 2, 3.

ישנה התאמה חד-חד-ערכית בין שתי הקבוצות, המספר 1 מותאם לריבוע האדום, המספר 2 מותאם למשולש הירוק, והמספר 3 מותאם לעיגול הצהוב.

עצמה:

תהי קבוצה $A = \{a, b, c, d, \dots, x, y, z\}$ (קבוצת האותיות הלטיניות). ידוע כי בקבוצה זו ישנם 26 איברים (ישנם 26 איברים באלף-בית הלטיני).

ותהי גם הקבוצה $B = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots, 26\}$ (המספרים מ-1 ל-26). ידוע גם כי בקבוצה זו ישנם 26 איברים.

במקום שנגיד כי בשתי הקבוצות יש את "אותו מספר" איברים נגיד כי לשתי הקבוצות יש **עצמה שווה**.

הגדרה (עצמה):

- לשתי קבוצות יש אותה עצמה אם קיימת התאמה חד-חד-ערכית בין איבריהן.
- שתי קבוצות שיש להם עצמות שוות נקראת **קבוצות שקולות**.

אפיון קבוצות אינסופיות

כמה דוגמאות לקבוצות אינסופיות:

קבוצת המספרים הטבעיים : $N = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ קבוצת כל המספרים (ללא המספר 0).

קבוצת המספרים הטבעיים כולל 0 : $N_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$.

שתי קבוצות אלו הן קבוצות אינסופיות, מכיוון שלכל מספר קיים ניתן למצוא מספר גדול יותר (למשל ע"י הוספת 1 למספר).

ניתן להראות כי שתי קבוצות אלו הם **שקולות** :

N : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ..., 100, 459.

N_0 : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ..., 99, 458...

רשמנו את איברי N בשורה ומתחתיהם את איברי N_0 , לכל איבר של N התאמנו איבר של N_0 הרשום מתחתיו.

כלל ההתאמה שלפיו עבדנו הוא: לכל $n \in N$ (n איבר ב- N) מותאם המספר $(n-1) \in N_0$ (המספר אשר בא לפני n).

התאמה זו היא חח"ע (חד-חד-ערכית) בין איברי N לאיברי N_0 , ולכן הקבוצות שקולות.

הגדרה (קבוצה אינסופית):

- קבוצה A היא אינסופית – אם יש קבוצה המורכבת מחלק מאיברי A שהיא שקולה ל- A .

איחוד קבוצות

שיכבת כיתות א' בבית הספר אלחריזי יצאו לטיול שנת. בשיכבה ישנן 2 כיתות. המדריך של כיתה א'1 היה חולה ולכן הוחלט כי שתי הכיתות יודרכו ע"י מדריך אחד, כיתה א'1 הצטרפה אל כיתה א'2.

זוהי דוגמא פשוטה ומוכרת לאיחוד קבוצות, הרי אם נגיד כי תלמידי כיתה א' הם איברים בקבוצה A ותלמידי כיתה א' הם איברים בקבוצה B אזי המדריך בטיול הדריך את A איחוד B, משמע את תלמידי שתי הכיתות.

נסמן את פעולת האיחוד בסימן $\cup$.

דוגמא:

תהיינה שתי קבוצות A ו-B כך ש $A=\{1,2,3,4,5\}$ ו $B=\{6,7,8,9,10\}$.
נגיד כי A איחוד B $C=(A \cup B)$ (קבוצה חדשה) $C=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$.

הגדרה (איחוד):

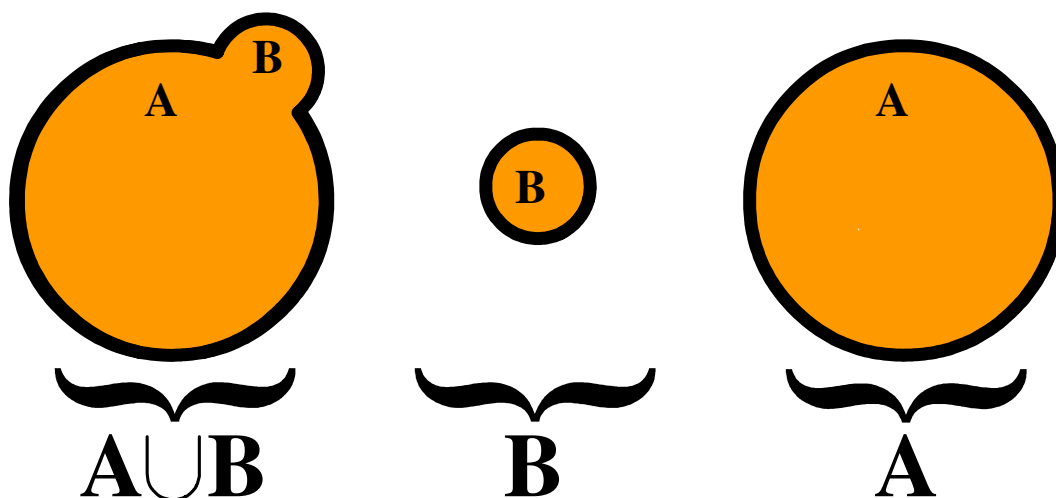
- תהיינה שתי קבוצות A ו-B שתי קבוצות כלשהן. ה"איחוד של A ו B" היא הקבוצה שאיבריה הם כל אותם האיברים השייכים או ל A או ל B (או לשתי הקבוצות גם יחד).

$$A \cup B = B \cup A = \{x \mid x \in A \text{ או } x \in B\}$$

משפט:

$$A \subseteq A \cup B$$

$$B \subseteq A \cup B$$



חיתוך קבוצות

הגדרה(חיתוך):

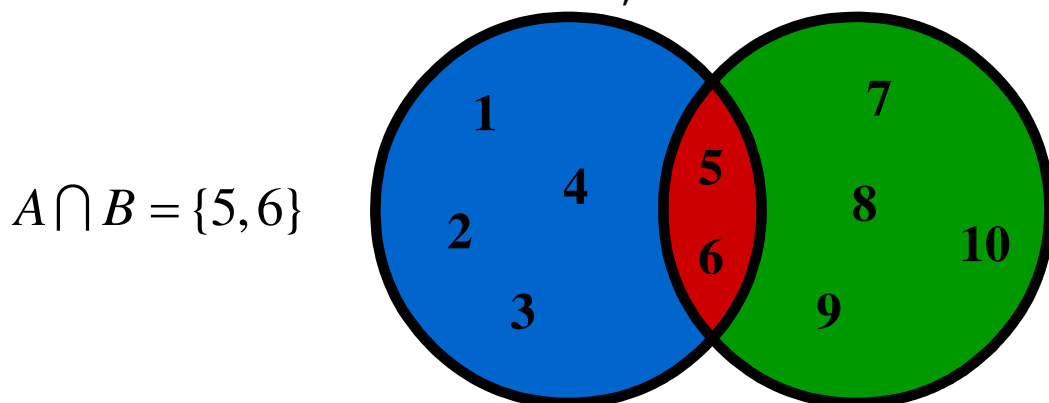
החיתוך של שתי קבוצות A ו B היא הקבוצה שאיבריה הם אותם עצבים שהם גם איברים של A וגם איברים של B.

נסמך חיתוך של שתי קבוצות A ו B כך: $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ וגם } x \in B\}$

דוגמא:

תהיינה A ו B שתי קבוצות כך ש: $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ו- $B = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

ע"פ ההגדרה החיתוך של שתי הקבוצות הללו היא הקבוצה של האיברים המשותפים לשתי הקבוצות, ניתן לראות בבירור(בציור) כי האיברים המשותפים הם 5,6:



משפט:

שתי קבוצות שהחיתוך שלהן הוא הקבוצה הריקה נקראות זרות.

בלשון מתמטית: $A \cap B = \emptyset$.

הפרש קבוצות

נפתח בדוגמא:

תהיינה A ו B קבוצות:

$A = \{ \text{סטודנטים באו"פ} \}$

$B = \{ \text{סטודנטים הלומדים מתמטיקה באו"פ} \}$

נגיד כי A **פחות** B היא הקבוצה שאיבריה הם כל איברי A פרט לאותם האיברים שהם גם ב-B.

לכן ע"פ הדוגמא נוכל להגיד כי A (קבוצת הסטודנטים הלומדים באו"פ) **פחות** B (קבוצת הסטודנטים הלומדים מתמטיקה באו"פ) היא הקבוצה C שאיבריה הם כל הסטודנטים של האוניברסיטה הפתוחה שאינם לומדים מתמטיקה באו"פ.

סיכום – משפטים ועקרונות

תהיינה A ו B שתי קבוצות:

- $B=A$ אם מתקיים:
(1) כל איבר של A הוא גם איבר של B.
וגם
(2) כל איבר של B הוא גם איבר של A.
- לכל קבוצה A ולכל עצם x מתקיימת בדיוק אחת מן האפשרויות הללו: $x \in A$ או $x \notin A$.
- קבוצה A נקראת חלקית לקבוצה B אם כל איבר של A הוא גם איבר של B.
- את המשפט A חלקית ל B מסמנים כך: $A \subseteq B$.
- $A \subseteq B$ כאשר לכל $x \in A$ מתקיים גם $x \in B$.
- לכל קבוצה A, $A \subseteq A$.
- לכל קבוצה A, $\emptyset \subseteq A$ ($\emptyset$ - הקבוצה הריקה).
- אם $A=B$ אז $A \subseteq B$ וגם $B \subseteq A$.
- קבוצה A היא חלקית-ממש לקבוצה B אם A חלקית ל-B אבל אינה שווה ל-B.
- מסמנים A חלקית-ממש ל B כך: $A \subset B$.
- האיחוד של שתי קבוצות A ו B הוא קבוצה שאיבריה הם כל אותם עצמים שהם או איברים ב A או איברים ב B, או איברים בשתי הקבוצות.

- מסמנים את קבוצת האיחוד $A \cup B$.
- $A \cup B = B \cup A$.
- $B \subseteq B \cup A$.
- $A \subseteq A \cup B$.
- החיתוך של שתי קבוצות A ו- B הוא הקבוצה שאיבריה הם אותם איברים שהם גם ב- A וגם ב- B .
- מסמנים קבוצה זו $A \cap B$ או $B \cap A$.
- תמיד מתקיים: $A \cap B \subseteq A$ וגם $A \cap B \subseteq B$.