

# מבוא למערכות לינאריות

א. שקד · ש. פרנקנטל · י. ביסטריץ

הפקולטה להנדסה  
אוניברסיטת תל אביב

מהדורה 1.2.3  
עריכת המהדורה: יניב עשבי

## הקדמה

חוברת זו נועדה לשמש חומר עזר בקורס "מבוא למערכות לינאריות", הנלמד בשנת הלימודים השניה במגמות להנדסת חשמל ואלקטרוניקה, הנדסה מכאנית והנדסה ביו-רפואית בפקולטה להנדסה באוניברסיטת תל אביב.

הצורך בחוברת זו התעורר מכיוון שאין בנמצא ספר יחיד המכיל את מירב החומר הנלמד קורס. בניגוד למקובל בספרות מושם בחוברת דגש על אחידות התיאור התאורטי של מערכות פסיקליות שונות ומגוונות, כשהמטרה היא לאפשר לסטודנטים מדיסציפלינות שונות ליישם את האמצעים בעזרתם ניתן לנתח מערכות בשטחי התעניינותם.

### החוברת מכילה שישה פרקים :

**פרק 1:** מודלים מתמטיים למערכות לינאריות ודיאגרמות אקויוולנטיות.

ספרות עזר נוספת מומלצת היא :

I פרק 2; II פרקים 2,3,4; III פרק 1.

**פרק 2:** מערכות לינאריות בזמן רציף.

הפרק מתאר מערכת לינאריות וקבועות בזמן ע"י משוואות דפרנציאליות רגילות, ופותר משוואות אלה במישור הזמן ובאמצעות התמרת לפלס.

ספרות עזר נוספת מומלצת היא :

I פרקים 4, (1-9) 3; IV פרקים 3, 4; V פרקים 6, 13.

**פרק 3:** ייצוג מערכות רציפות במרחב המצבים.

הפרק דן בייצוג מערכות רציפות במרחב המצבים, בפתרון משוואות מצב ובמעבר בין לבין משוואות דיפרנציאליות סקלריות ופונקציות תמסורת.

ספרות עזר נוספת מומלצת היא :

III פרק (11-18) 3; V פרק 12; VI פרקים (1-3) 3, 4; VII פרקים (1-3) 4, 3; VII פרקים 1, 2.

**פרק 4:** ניתוח מערכות רציפות בתחום התדר.

הדיון כולל שיטות ניתוח ע"י עקומי בודה.

ספרות עזר נוספת מומלצת היא :

I פרק (1-11) 8; IV פרקים 8, 11, 13, 15.

**פרק 5:** מערכות דיסקרטיות.

הפרק מתאר מערכת ליניאריות בדידות ע"י משוואות הפרש ומתאר את פתרון במישור ה"זמן" ובאמצעות התמרת  $Z$  ; דיסקרטיזציה של מערכות רציפות ; הצגת מערכות בדידות ע"י משוואות מצב ופתרון.  
ספרות עזר נוספת מומלצת היא : VI פרק 9 ; VIII פרק 4.

**פרק 6:** קריטריונים ליציבות מערכות רציפות ובדידות.

הפרק מביא את מבחן Routh ליציבות מערכת לינארית רציפה ואת מקבילתו הדיסקרטית.

כמו כן כוללת החוברת קובץ תרגילים.

ספרות עזר מומלצת

- I *D'Azzo and Houpis*: Linear Control System Analysis and Design  
(McGraw Hill, Int. Student Edition)
- II *Cannon*: Dynamic of Physical Systems  
(McGraw Hill, Int. Student Edition)
- III *Shearer, Richardson, Murphy*: Introduction to System Dynamics  
(Eddison Wesley Ltd.)
- IV *Di Stefano*: Feedback and Control Systems  
(Schaum's Outline Series)
- V *DeSoer & Kuh*: Basic Circuit Theory  
(McGraw Hill, Int. Student Edition)
- VI *Elgerd*: Control Systems Theory  
(McGraw Hill, Int. Student Edition)
- VII *Weinberg*: State Space and Linear Systems  
(Schaum's Outline Series)
- VIII *Saucedo and Schiring*: Introduction to Continuous and Digital Control Systems (Macmillan)



# 1. מודלים מתמטיים למערכות ליניאריות ודיאגרמות אקוויוולנטיות

## 1.1 מערכות חשמליות

מערכת היא מתקן פיסיקלי שלו אותות כניסה ואותות יציאה; התיאור המתמטי של מערכת הוא משוואה המקשרת בין אותות היציאה לבין אותות הכניסה. ניתן לסווג את המערכות לפי רציפות ובדידות, מקובצות ומפולגות, וכן לפי ליניאריות ואי-ליניאריות. במערכת רציפה אות העירור הוא פונקציה רציפה של הזמן ואילו במערכת בדידה אות זה הוא פונקציה בדידה של הזמן. בהתאם, תהיה המשוואה המתארת את הקשר בין הערור לבין אות היציאה, משוואה דיפרנציאלית במערכת רציפה, ומשוואת הפרשים במערכת בדידה. מערכת רציפה היא מקובצת אם המשוואה הדיפרנציאלית המתארת הקשר הנ"ל היא רגילה. אם המשוואה היא חלקית תקרא המערכת מפולגת. מערכת ליניארית מוגדרת כמערכת בה קיים עקרון הסופרפוזיציה וכל מערכת שאינה ליניארית מוגדרת כאי-ליניארית. במערכות חשמליות האותות השמושיים הם זרם ומתח; זרם הוא **משתנה דרך** - משתנה שהמתקן למדידתו מחובר בטור למערכת. מתח הוא **משתנה מעבר** - משתנה שהמתקן למדידתו מחובר במקביל למערכת. מערכות פיסיקליות עשויות להיות בנויות מסוגים שונים של רכיבים פיסיקליים, שלהם תכונות פיסיקליות מגוונות. התיאור והפתרון המתמטי המלא של מערכות אלו מסובך וכדי לפשט את התהליכים המתמטיים הללו, נתאר מערכות ע"י מודלים המורכבים ממספר מוגבל של סוגי רכיבים אידיאליים-סטנדרטיים. יהא עלינו להיות מודעים למגבלות המודלים האידיאליים שנבנה, ולמידת נאמנותם למערכות הפיסיקליות המקוריות שהם מיצגים.

אבני הבניין למודלים של מערכות חשמליות יהיו האלמנטים האידיאליים-סטנדרטיים שיתוארו להלן; לכולם שני הדקים בלבד ונאפיין אותם ע"י הקשר בין המתח על פניהם (משתנה מעבר) לבין הזרם דרכם (משתנה דרך).

**נגד אידיאלי** הוא רכיב שמשואתו:

$$(1.1) \quad V = Ri$$

כאשר  $R$  קבוע\*. נגדים ראליים (פיסיקליים) כוללים גם מידה מסוימת של השראות וקבול, ו- $R$  אינו קבוע בהם אלא תלוי בגורמים סביבתיים שונים.

---

לעתים נתיר ל- $C, R$  או  $L$  להיות תלויים בזמן. מערכות הכוללות רכיבים כאלה נקראות **מערכות המשתנות בזמן**.

**קבל אידיאלי** הוא רכיב שמשואתו:

$$(1.2) \quad i = C \frac{dv}{dt}$$

כאשר  $C$  קבוע\*. בקבל שהמתח על פני הדקיו  $V$  אגורה אנרגיה בשיעור  $\frac{1}{2}CV^2$ .

**משרן אידיאלי** הוא רכיב שמקיים:

$$(1.3) \quad V = L \frac{di}{dt}$$

כאשר  $L$  קבוע\*. במשרן שהזרם דרכו  $i$  אגורה אנרגיה בשיעור  $\frac{1}{2}Li^2$ .

מובן שקבלים ומשרנים אידיאליים אינם בנמצא; אולם למטרות רבות הם מהווים מודל נאמן במידה מספקת לרכיבים הפיסיקליים המתאימים.

**מקור מתח אידיאלי** הוא התקן שהמתח על פניו עשוי להיות תלוי בזמן בלבד, ולא בזרם דרכו או בכל גורם סביבתי אחר.

**מקור זרם אידיאלי** הוא התקן שהזרם דרכו עשוי להיות תלוי בזמן בלבד, ולא במתח על פניו או בכל גורם סביבתי אחר.

סוג מיוחד של מקורות אידיאליים הוא **מקורות אידיאליים מבוקרים**: המתח על פניהם או הזרם דרכם תלוי בזרם או במתח מסוים במערכת. למשפחה מיוחדת זו של מקורות נקדיש סעיף נפרד בהמשך הפרק.

**התרשים החשמלי** של המערכת הוא אמצעי עזר להבנת המבנה הפנימי של המערכת (או של המודל למערכת); בתרשים מחוברות בקוים כל הנקודות המחוברות מבחינה חשמלית, היינו, כל הנקודות שוות הפוטנציאל.

למערכת עשויות להיות מספר כניסות ויציאות, אך אנו נדון בדרך כלל במערכות שלהן כניסה אחת ויציאה אחת. הכניסה למערכת תהא אות עירור בלתי תלוי, ואות היציאה יהא אחד הזרמים או המתחים במערכת. כדי לקבל את התלות של אות היציאה באות העירור, נשתמש בחוקי קירכהוף ובמשואות רכיבי המערכת.

---

\* ראה הערה בעמ' 1.

**חוק הזרמים של קירכהוף:** בתרשים חשמלי, הסכום האלגברי של הזרמים הנכנסים לצומת הוא אפס.

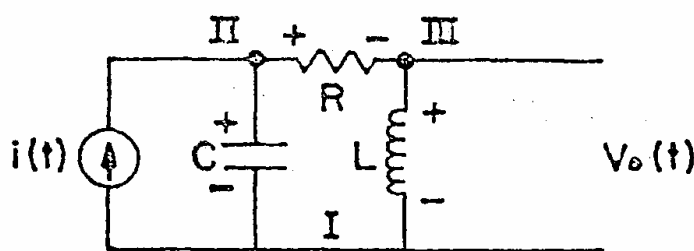
**חוק המתחים של קירכהוף:** בתרשים חשמלי, סכום מפלי המתחים סביב לולאה סגורה שווה לאפס.

משני חוקים אלה, וממשואות רכיבי המערכת ניתן לקבל מערכת משוואות דיפרנציאליות המגדירה את הקשר בין אות היציאה של המערכת לבין העירור. חשוב לציין שעבור מערכת חשמלית הכוללת רכיבים אידיאליים-סטנדרטיים בלבד, ניתן לבטא את הקשר בין המוצא לבין העירור ע"י משוואה דיפרנציאלית יחידה. נזכיר ונדגים שתי דרכים שיטתיות, המבוססות על חוקי קירכהוף, לקבלת המשוואות הדרושות מתוך התרשים החשמלי של המערכת.

**שיטת מתחי צומת:** בחר צומת שיקרא צומת יחוס, וקבע את הפוטנציאל בו לאפס. הגדר עבור כל הצמתים האחרים בתרשים פוטנציאל ביחס לצומת היחוס. בטא באמצעות הפוטנציאלים הללו את מפלי המתח על פני כל רכיבי המערכת. באמצעות משוואות האלמנטים בטא עתה את הזרמים העוברים דרך כל ענף. עתה רשום את משוואת חוק הזרמים עבור כל הצמתים פרט לצומת היחוס.

מתקבלת מערכת משוואות שהנעלמים בה הם הפוטנציאלים בצמתים. מספר המשוואות שווה למספר המשתנים הנעלמים. (קל לראות ששיטה זו נוחה במיוחד כאשר המערכת כוללת מקורות מתח, או כאשר העירור הוא מתח. במקרים אלו אחת - או יותר ממשוואות הצמתים עשויה להפוך למיותרת).

**דוגמא 1.1:** מצא משוואה עבור מתח היציאה  $V_0(t)$  במערכת הבאה:



נשתמש בשיטת מתחי צומת. נסמן את הצמתים באותיות רומיות. יהי צומת I צומת יחוס, ונקבע את הפוטנציאל בו לאפס. נסמן את הפוטנציאל  $V_{II}$  בצומת II, ואת הפוטנציאל  $V_{III}$  בצומת III. נבחר כוונני יחוס למתח על פני הענפים. המתח על המשך הוא  $V_{III}$ . המתח על פני הקבל הוא  $V_{II}$ , והמתח בין הדקי הנגד הוא  $V_{II} - V_{III}$ .

כיווני היחוס של הזרמים תואמים את כווני היחוס של המתחים באופן שזרם מוגדר כחיובי

מהקוטב החיובי לקוטב השלילי דרך האלמנט. לפיכך זרם הקבל הוא  $C \frac{dv_{II}}{dt}$ .

זרם המשורן הוא  $I_{LO} + \frac{1}{L} \int_0^t V_{III} dt$ , הוא הזרם ההתחלתי דרך המשורן.

זרם הנגד הוא:  $\frac{1}{R}(V_{II} - V_{III})$

נוכל כעת לרשום את משוואות חוק הזרמים עבור שני הצמתים II ו-III:

**עבור צומת II:**

$$(1.4) \quad i(t) - \frac{1}{R}(V_{II} - V_{III}) - C \frac{dv_{II}}{dt} = 0$$

**עבור צומת III:**

$$(1.5) \quad \frac{1}{R}(V_{II} - V_{III}) - \frac{1}{L} \int_0^t V_{III} dt - I_{LO} = 0$$

קבלנו מערכת בת שתי משוואות אינטגרל-דיפרנציאליות עבור שני הפוטנציאלים  $V_{II}$  ו- $V_{III}$ . נקבל

את המשוואה הדיפרנציאלית היחידה עבור מתח המוצא,  $V_{III} = V_0(t)$ ,

ממשוואה (1.5):

$$(1.6) \quad V_{II} = RI_{LO} + \frac{R}{L} \int_0^t V_{III} dt + V_{III}$$

נציב את הביטוי במשוואה (1.4):

$$(1.7) \quad i(t) - I_{LO} - \frac{1}{L} \int_0^t V_{III} dt - \frac{RC}{L} V_{III} - C \frac{dv_{III}}{dt} = 0$$

נגזור משוואה זו ונקבל:

$$(1.8) \quad C \frac{d^2 V_{III}}{dt^2} + \frac{RC}{L} \frac{dV_{III}}{dt} + \frac{V_{III}}{L} = \frac{di(t)}{dt}$$

זו המשוואה הדיפרנציאלית המבוקשת.

המתח  $V_0(t) = V_{III}$  אינו תלוי אך ורק בעירור, אלא גם במתח ההתחלתי על פני הקבל  $V_{CO}$  ובזרם ההתחלתי דרך המשורן  $I_{LO}$ . (במערכת מורכבת יותר - בערכים ההתחלתיים של מתחי כל הקבלים וזרמי כל המשרנים). הסיבה לכך היא שגדלים אלה מייצגים את החלוקה ההתחלתית של האנרגיה האגורה במערכת. גדלים אלה יבואו לידי ביטוי בפתרון המתמטי בכך שבאמצעותם

נחשב את  $V_{III}(0)$  ואת  $\frac{dv_{III}(0)}{dt}$ , ערכים הקרויים **תנאי התחלה**.

תנאי ההתחלה הכרחיים לקבלת פתרון יחיד למשוואה הדיפרנציאלית.

מחוק המתחים קל לראות ש:

$$(1.9) \quad V_{III}(0) = V_{CO} - RI_{LO}$$



לקבלת  $\frac{dv_{III}(0)}{dt}$  נציב  $t = 0$  במשוואה (1.7):

נקבל:

$$(1.10) \quad C \frac{dv_{III}(0)}{dt} + \frac{RC}{L} V_{III}(0) + I_{LO} = i(0)$$

נציב את  $V_{III}(0)$  כפי שמצאנו במשוואה (1.9) ונקבל:

$$(1.11) \quad C \frac{dv_{III}(0)}{dt} + \frac{RC}{L} V_{CO} - \frac{R^2 C}{L} I_{LO} + I_{LO} = i(0)$$

נבודד את  $\frac{dv_{III}(0)}{dt}$  ונקבל סופית:

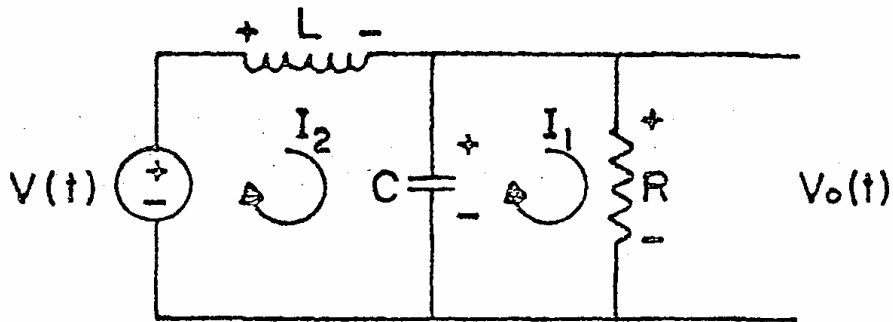
$$(1.12) \quad \frac{dv_{III}(0)}{dt} = \frac{i(0)}{C} - \frac{R}{L} V_{CO} + I_{LO} \left( \frac{R^2}{L} - \frac{1}{C} \right)$$

**הערה:** לו במקום מקור זרם היה בבעיה מקור מתח  $V(t)$ , היינו מסתפקים במשוואת זרמים עבור הצומת III. היתה עומדת לרשותנו המשוואה  $V_{II} = V(t)$  והבעיה היתה הופכת לבעיה שבה משתנה נעלם אחד בלבד.

**שיטת זרמי לולאה:** עבור כל לולאה בתרשים הגדר זרם לולאה. בטא את זרמי כל הענפים באמצעות זרמי הלולאות (זרם הענף יהא סכום זרמי הלולאות שהוא משותף להן). באמצעות משוואות האלמנטים בטא את מתחי כל הענפים; עתה רשום את חוק המתחים עבור כל הלולאות.

מתקבלת מערכת משוואות שהנעלמים בה הם זרמי הלולאות. מספר המשוואות מתאים למספר המשתנים הנעלמים. (שיטה זו נוחה במיוחד כאשר המערכת כוללת מקורות זרם. אזי - משוואה אחת (או יותר) מבין משוואות המתחים עשויה להפוך למיותרת).

דוגמא 1.2: מצא משוואה עבור מתח המוצא במעגל הבא; השתמש בשיטת זרמי לולאה:



בתרשים זה שתי לולאות.

נגדיר עבור הלולאה הימנית זרם לולאה  $I_1$ , ועבור השמאלית  $I_2$ . נקבע כוון יחוס לזרמים. כעת, זרם המשטרן וזרם המקור הוא  $I_2$ ; הזרם דרך הנגד הוא  $I_1$  וזרם הקבל  $I_2 - I_1$ . (בחרנו את  $I_2$  ככוון יחוס חיובי לזרם דרך הקבל).

מתוך משוואות האלמנטים נמצא את המתח בין הדקיהם:

מתח הנגד הוא  $RI_1$ .

מתח המשרן -  $L \frac{dI_2}{dt}$ .

מתח הקבל הוא  $V_{CO} + \frac{1}{C} \int_0^t (I_2 - I_1) dt$ , הוא המתח ההתחלתי על פני הקבל.

(שים לב לכווני היחוס של המתחים כפי שהם מסומנים בתרשים).

נרשום עתה את חוק המתחים עבור שתי הלולאות:

$$(1.13) \quad V(t) = L \frac{dI_2}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t (I_2 - I_1) dt + V_{CO}$$

$$(1.14) \quad RI_1 - \frac{1}{C} \int_0^t (I_2 - I_1) dt - V_{CO} = 0$$

נגזור את המשוואה (1.14) ונבודד את  $I_2$ :

$$I_2 = I_1 + RC \frac{dI_1}{dt}$$

עתה נציב את  $I_2$  במשוואה (1.13) ונקבל (לאחר צעד מתמטי אחד):

$$V(t) = RLC \frac{d^2 I_1}{dt^2} + L \frac{dI_1}{dt} + RI_1$$

מתח המוצא המבוקש הוא  $V_0(t) = RI_1(t)$ .

המשואה עבור  $V_0$  היא :

$$(1.15) \quad V(t) = LC \frac{d^2 V_0}{dt^2} + \frac{L}{R} \frac{dV_0}{dt} + V_0$$

בנוסף למתח הערור  $V(t)$ , יהא תלוי מתח התגובה (המוצא)  $V_0(t)$  גם במתח ההתחלתי על פני

הקבל ובזרם ההתחלתי דרך המשרן. באמצעותם נוכל לחשב את  $V_0(t)$  ואת  $\frac{dV_0(0)}{dt}$  – תנאי

ההתחלה המצורפים למשוואה הדיפרנציאלית.

הקשר הבא הוא מידי :

$$V_0(0) = V_{CO}$$

תנאי ההתחלה השני יתקבל ישירות מההתבוננות במעגל ומהפעלת חוק הזרמים :

$$\frac{dv_0(0)}{dt} = \frac{1}{C} \left[ C \frac{dv_{CO}(0)}{dt} \right] = \frac{1}{C} \left[ I_{LO} - \frac{V_{CO}}{R} \right]$$

**הערה:** לו במקום מקור מתח היה מוצב במעגל מקור זרם  $I(t)$ , היינו מסתפקים במשוואת מתחים

רק עבור הלולאה הימנית. זאת מכיוון שאז היתה המשואה המידית  $I(t) = I_2$ , מחליפה את

המשואה עבור הלולאה השמאלית.

מובן מאליו שאת שני מעגלי הדוגמא האחרונים ניתן אף לפתור בדרכי קצור, בלא להשתמש

באופן מפורש בשיטה סטנדרטית. אולם, במעגלים מסובכים יותר השימוש בדרכים שיטתיות הוא

בדרך כלל הכרחי.

## 1.2 מערכות מכניות טרנסלטוריות

במערכת טרנסלטורית לא מתקיימת תנועת סיבוב סביב ציר. מבין המערכות הטרנסלטוריות

נטפל אך ורק במערכות שהתנועה בהן היא לאורך קו ישר אחד; את המסקנות שניסיק ואת הכלים

שנפתח ניתן להתאים למקרים כלליים יותר. התמד, אלסטיות וסוגים שונים של חיכוך הן תופעות

פיסיקליות המתגלות בכל מערכת מכנית. כדי לפשט את הניתוח המתמטי של פעולת מערכת

מכנית נתאר מודל של המערכת המורכב מאלמנטים מכניים אידיאליים - סטנדרטיים. האותות

במערכת הטרנסלטורית יהיו המהירות  $V$  שהיא אנלוגית למתח במערכת חשמלית, והיא משתנה

"מעבר", והכוח  $F$  האנלוגי לזרם והוא משתנה "דרך".

האלמנטים האידיאליים - הסטנדרטים הם :

**קפיץ אידיאלי** הוא רכיב שתנועתו נשלטת ע"י חוק הוק :

$$(1.16) \quad F = kx \quad \text{או} \quad \frac{dF}{dt} = kv$$

F - הוא הכוח הפועל בקפיץ,

x - המרחק בין שני הדקוי,

v - המהירות היחסית של הדק אחד ביחס לאחר,

k - הוא קבוע הקפיץ.

בניגוד לקפיץ הפיסיקלי, הקפיץ האידיאלי חסר מסה ולא פועלות בו תופעות של חיכוך. כמו כן, K הוא קבוע בקפיץ האידיאלי; בקפיץ פיסיקלי ה-k קבוע רק בתחום האלסטיות של הקפיץ.

קפיץ הוא אלמנט אוגר אנרגיה: בעת שהמרחק בין הדקוי הוא x אגורה בו אנרגיה בשיעור  $\frac{1}{2}kx^2$

מאחר ו  $v = \frac{1}{k} \frac{df}{dt}$  כש-F הוא משתנה הדרך ו-v משתנה מעבר ברור כי הקפיץ האידיאלי אנלוגי

מתמטית למשרן האידיאלי עם השראות של  $\frac{1}{k}$ .

**מסן ליניארי אידיאלי** הוא רכיב המהווה אידיאליזציה למכשירים הפיסיקליים בהם כוח החיכוך פרופורציוני למהירות היחסית בין שני חלקים נעים. דוגמא למתקן כזה הוא בולם זעזועים הידארולי: בוכנה ובה מספר נקבים נעה בגליל מלא שמן. משואתו של מסן אידיאלי היא:

$$(1.17) \quad F = B v$$

הוא חסר מסה ולא מתגלה בו אלסטיות.

מהמשוואה האחרונה מסתמנת האנלוגיה המתמטית הברורה לנגד האידיאלי עם התנגדות  $\frac{1}{B}$ .

**מסה**, תנועתה נשלטת ע"י החוק השני של ניוטון:

$$(1.18) \quad F = m \frac{dv}{dt}$$

F הוא הכוח הפועל על המסה, ו-v מהירותה של המסה ביחס למערכת היחוס שבחרנו.

האנלוגיה כאן היא לקבל האידיאלי בעל קבול m.

**מקור כוח אידיאלי** הוא התקן בעל שני הדקים אשר הכוח הפועל בו אינו תלוי במהירות היחסית בין הדקוי ולא בגורמים חיצוניים כלשהם, פרט לזמן.

**מקור מהירות אידיאלי** הוא התקן שהמהירות היחסית בין שני הדקיו אינה תלויה בכוח הפועל ולא בגורמים חיצוניים כלשהם פרט לזמן. כדי להקל את הבנת המבנה והפעולה של מערכות מכניות טרנסלטוריות, מקובל לשרטט תרשים מכני עבור אותן מערכות, הכולל סמלים עבור האלמנטים המכניים וחבורים מכניים ביניהם.



קפיץ אידיאלי מתואר ע"י הסמל:

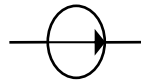


מרסן ליניארי אידיאלי מתואר ע"י הסמל:

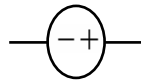


מסה מתוארת ע"י הסמל:

ההדק הימני מציין את מערכת היחוס.



מקור כוח מסומל ע"י:



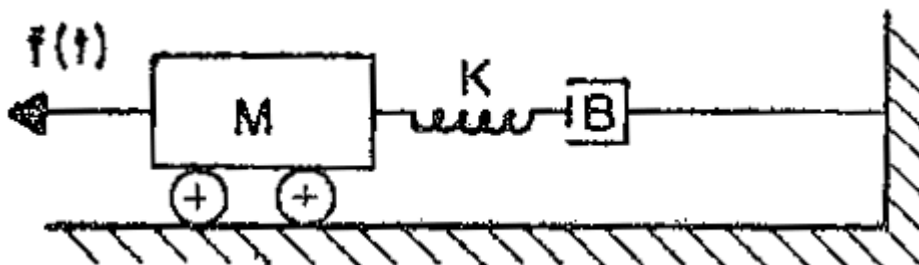
ומקור מהירות ע"י:

כוון היחוס למהירות היחסית שבין שני הדקיו של אלמנט מסומן ע"י סימן + מול הדק אחד, וסימן - ליד ההדק האחר. אז, כאשר ההדק המסומן + נע במהירות חיובית יותר מאשר ההדק המסומן - אנו אומרים שהפרש המהירויות בין הדקי האלמנט חיובי. חץ בצד האלמנט מציין את כוון היחוס של הכוח, כאשר הכוח המופעל "נוטה" לגרום לכך שהמהירות של ההדק ליד זנב החץ תהיה חיובית יותר מאשר זו של ההדק ליד ראש החץ.

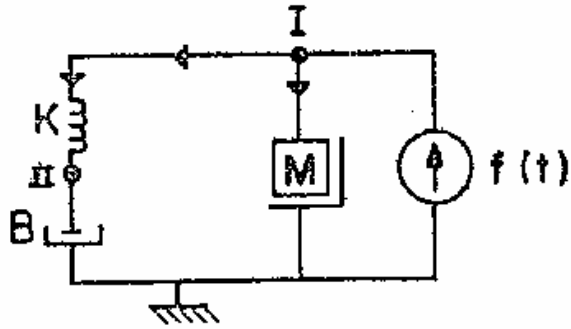
בדרך כלל מקובל לבחור כיווני יחוס תואמים לכוח ולמהירות, באופן שזנב החץ יהיה ליד ההדק המסומן +.

חיבור מכני מסומן בתרשים ע"י קו, במלים אחרות, בתרשים המכני מחוברות בקוים כל הנקודות שלהן מהירות זהה.

**דוגמא 1.3:** שרטט תרשים מכני עבור המערכת הבאה:



התרשים המכני המתאים הוא :



קל לזהות בתרשים את החבורים המכניים בין הקפיץ לבין המסה, ובין ההדק האחר של הקפיץ לבין המרסן. ההדק האחר של המרסן מחובר להדק המציין את מערכת היחוס לתנועתה של המסה. הסמל מדגיש שהמהירות בנקודה אליה הוא קשור היא מהירות היחוס במערכת. יש לשים לב כי בצמתים I ו-II ישנן מהירויות שונות.

מהאופן בו בנינו את התרשים המכני נובעים שני הכללים הבאים :

- א. סכום הפרשי המהירות על פני האלמנטים סביב לולאה סגורה שווה אפס.
- ב. הסכום האלגברי של הכוחות המצויינים ע"י חיצים הנכנסים לצומת שווה לאפס.

נסכם : כוח המסומן ע"י חץ בכיוון הצומת בסימן חיובי וכוח מסומן ע"י חץ היוצא מצומת בסימן שלילי.

שני חוקים אלו הם השתקפות של חוקי הקינמטיקה והדינמיקה המכניים בתרשים המכני.

הדמיון הצורני בין משוואות האלמנטים המכניים האידיאליים למשוואות האלמנטים החשמליים האידיאליים, ובין חוקי קירכהוף לחוקי הרשת המכנית שהזכרנו זה עתה, מביא לדמיון במשוואות המתמטיות עבור מערכות חשמליות ומכניות שהתרשימים המתארים אותן דומים.

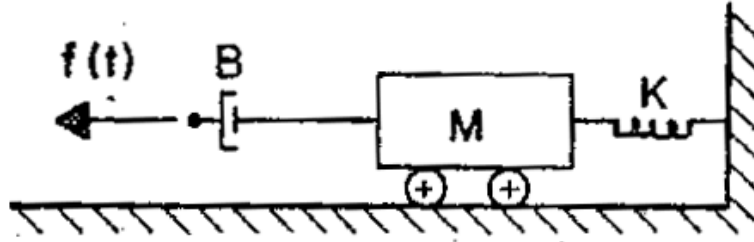
נסכם מסקנה זו באופן מפורש : תהי נתונה לנו מערכת מכנית הניתנת לתאור ע"י תרשים מכני הכולל מסות, קפיצים, מרסנים ומקורות - כולם אידיאליים. נמיר את התרשים המכני בתרשים חשמלי ע"י כך שנחליף בתרשים כל מסה  $M$  בקבל שהערך המספרי של קבולו  $M$ . כל קפיץ  $K$

במשרן שהערך המספרי של השראותו  $\frac{1}{k}$ . כל מרסן  $B$  בנגד שהערך המספרי של התנגדותו  $\frac{1}{B}$ . כל

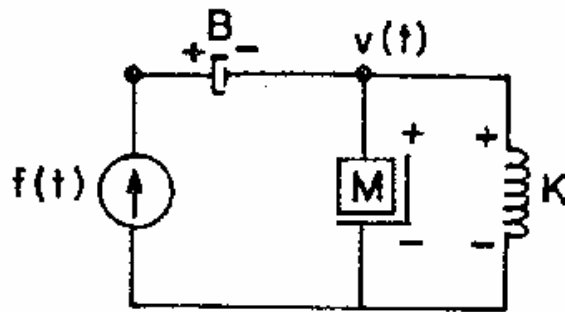
מקור כוח  $F$  במקור זרם שערכו המספרי  $F$ , וכל מקור מהירות  $v$  במקור מתח שערכו המספרי  $v$ . עתה, המשואה הדיפרנציאלית של המעגל החשמלי שהתקבל היא המשואה המתארת את פעולת המערכת המכנית המקורית.

חשיבותה של עובדה זו היא בכך שנוכל לנתח מערכות מכניות בשיטות הקיימות לניתוח מערכות חשמליות. התרשים החשמלי שהתקבל ע"י המרת התרשים המכני קרוי **הדיאגרמה האקויוולנטית** של המערכת.

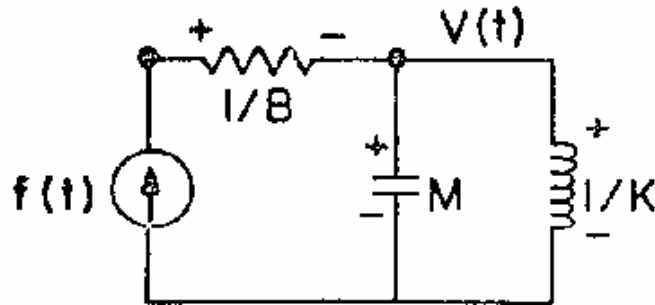
**דוגמא 1.4:** במערכת הבאה, מצא משוואה עבור מהירות המסה. הנח שאין חיכוך במערכת להוציא החיכוך שבמסך B.



התרשים המכני הוא:



והתרשים האקויוולנטי החשמלי הוא:



קל לקבל את המשוואה עבור  $v(t)$ :

$$M \frac{dv(t)}{dt} + K \int_0^t v(t) dt + I_{L0} = f(t)$$

או:

$$M \frac{d^2v(t)}{dt^2} + Kv(t) = \frac{df(t)}{dt}$$

$I_{L0}$  הוא הזרם ההתחלתי דרך המסרן במעגל האקויוולנטי, או הכוח ההתחלתי הפועל על הקפיץ במערכת המכנית).

למשואה הדיפרנציאלית יש לצרף את שני תנאי ההתחלה  $v(0)$  ו-  $\frac{dv(0)}{dt}$ . שני תנאי התחלה אלו ימצאו מתוך ידיעת הכח ההתחלתי הפועל בקפיץ והמהירות ההתחלתית של המסה - הגדלים הקובעים את החלוקה ההתחלתית של האנרגיה במערכת. המהירות התחלתית  $v(0)$  היא המהירות התחלתית של המסה, הנגזרת ההתחלתית  $\frac{dv(0)}{dt}$  תתקבל מתוך הנוסחה:

$$\frac{dv(0)}{dt} = \frac{1}{M} [f(0) - f_{k0}]$$

כאשר  $f_{k0}$  הינו הכוח ההתחלתי הפועל בקפיץ.

### 1.3. מערכות מכניות סיבוביות

נדון אך ורק בתנועה סביב ציר יחיד. עם זאת, את המסקנות שנסיק ניתן להרחיב ולהתאים לתנועה סיבובית כללית יותר.

התאור המתמטי של תנועה סביב ציר אנלוגי לתיאור המתמטי של תנועה לאורך ישר. לפיכך נוכל לשרטט תרשים מכני עבור מערכת הנעה סביב ציר בדומה לתרשים המכני ששרטטנו עבור מערכות טרנסלטוריות. עבור התרשימים המכניים הסיבוביים נוכל לשרטט תרשימים חשמליים אקויוולנטיים, ונוכל להשתמש בחוקי הרשתות החשמליות כדי להגיע למשוואות הדיפרנציאליות הקובעות את תגובת המערכות.

בתנועה סיבובית משתנה המעבר הוא **המהירות הזוויתית**  $\omega$ .

משתנה הדרך במקרה זה הוא **המומנט**  $\tau$ .

האלמנטים האידיאליים היסודיים הם מוט הפתול, המרסן הסיבובי ויחידת האינרציה. כמו כן משתמשים במקור מומנט אידיאלי, ובמקור מהירות זוויתית אידיאלי.

**מוט פתול אידיאלי** הוא התקן שעבורו מתקיים  $\tau = K\theta$ , או:

$$(1.19) \quad \frac{d\tau}{dt} = k\omega$$

$\tau$  הוא המומנט הפועל,  $\theta$  זווית הפתול של קצה אחד ביחס לקצה האחר ו- $\omega$  היא המהירות הזוויתית היחסית של הקצה האחד ביחס לקצה האחר. התקן זה אנלוגי מתמטית לקפיץ.

**מרסן סיבובי אידיאלי** הוא התקן שעבורו מתקיים:

$$(1.20) \quad \tau = B\omega$$

כאשר B הוא מקדם הריסון.



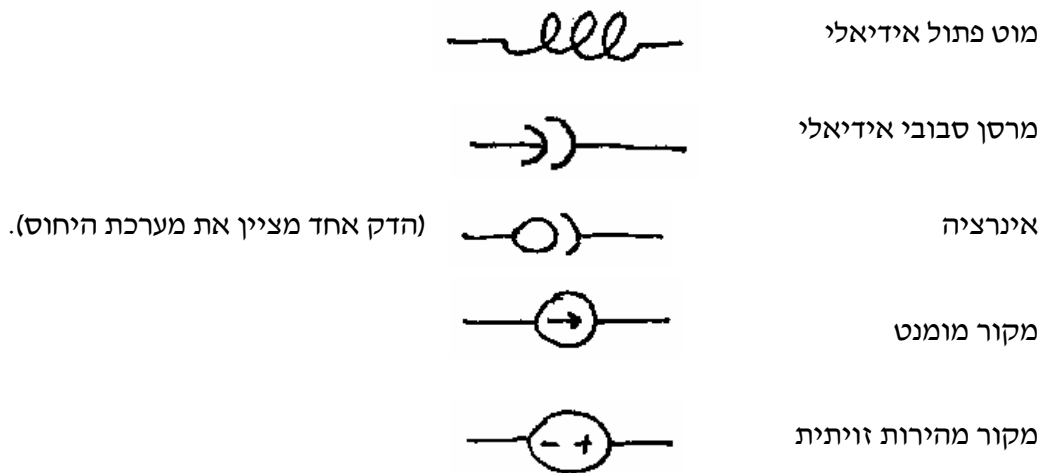
יחידת אינרציה היא התקן שעבורו מתקיים :

$$(1.21) \quad \tau = I \frac{d\omega}{dt}$$

כאשר I היא האינרציה.

יש לשוב ולהדגיש שאלמנטים אידיאליים אינם בנמצא בעולם הפיסיקלי. אנו משתמשים בהם כאבני בנין למודל שהוא נוח יותר לחקירה מתמטית, ועלינו להקפיד שיהיה נאמן דיו למערכת המקורית שהוא מייצג.

הסמלים המוסכמים עבור האלמנטים האידיאליים הם :



בתרשים המכני נחבר בקוים את כל הנקודות המחוברות מכנית זו לזו ; במלים אחרות - מחוברות כל הנקודות שלהן מהירות זוויתית משותפת.

חוקי הדינמיקה והקינמטיקה הסיבוביים משתקפים בתרשים המכני לחוקי הרשת הבאים :

א. סכום הפרשי המהירות הזוויתית על פני האלמנטים סביב לולאה סגורה שווה לאפס.

ב. הסכום האלגברי של המומנטים המצויינים ע"י חצים הנכנסים לצומת שווה לאפס.

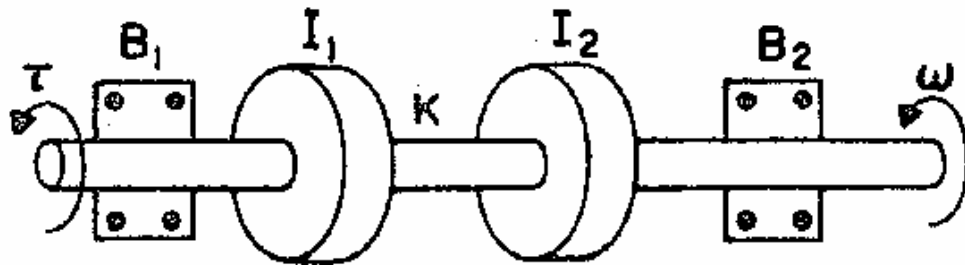
(מומנטים המצויינים ע"י חצים נכנסים מסמכים בסימן חיובי, ומומנטים המצויינים ע"י חצים יוצאים מסמכים בסימן שלילי).

כדי לקבל את הדיאגרמה החשמלית האקויוולנטית, יש להמיר כל מוט פתול k במשך  $\frac{1}{k}$  ;

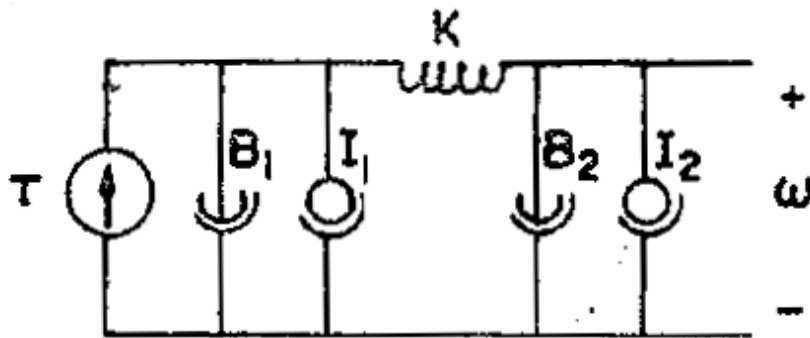
כל אינרציה I בקבל I ; כל מרסן סבובי B בנגד  $\frac{1}{B}$  ; כל מקור מומנט  $\tau$  במקור זרם  $\tau$  וכל מקור

מהירות זוויתית  $\omega$  במקור מתח  $\omega$ . המשואה הדיפרנציאלית של המעגל החשמלי שהתקבל תתאים למערכת המכנית הסיבובית המתוארת ע"י התרשים המכני.

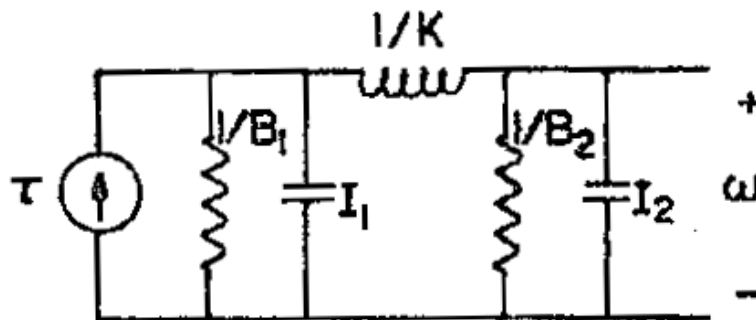
**דוגמא 1.5:** הציור מתאר מתקן לתנועה סיבובית. מסומנות שתי אינרציות  $I_1, I_2$ . הקטע המקווקו הוא מוט פתול  $k$ . המוט אחוז ע"י שני מיסבים עם  $B_1, B_2$ . בקצהו האחד הוא מעורר ע"י מומנט  $\tau$ . מצא משואה עבור  $\omega$ , שהיא המהירות הזוויתית של הקצה השני. הנח שמאחר ולא נאמר אחרת במפורש, אין לחלקי המוט אינרציה ואלסטיות והם אינם מחוככים.



התרשים המכני המתאים הוא:



התרשים החשמלי האקויוולנטי הוא:



את המשואה עבור  $\omega$  ניתן למצוא בקלות בשיטת מתחי צומת. תתקבל משואה מסדר שלישי עבור  $\omega$ ; את שלושת תנאי ההתחלה המצורפים אליה, ניתן לקבל מידיעת המהירויות הזוויתיות ההתחלתיות של שתי האינרציות, ומתוך המומנט ההתחלתי במוט הפתול. 3 גדלים אלו מגדירים את החלוקה ההתחלתית של האנרגיה בתוך המערכת.

המודל שנתאר להלן מאפשר לתאר שתי תופעות תרמודינמיות בלבד: קבול חום והולכת חום. קשה בדרך כלל להעזר בו בניתוח כמותי בשל הקושי לחשב או להעריך את הפרמטרים; אולם, הוא עשוי לסייע בניתוח איכותי של מערכות תרמודינמיות. האלמנטים האידיאליים שנשתמש בהם במערכות תרמיות הם נגד תרמי אידיאלי, קבל חום אידיאלי, מקור ספיקת חום אידיאלי ומקור טמפרטורה אידיאלי. הטמפרטורה משמשת במערכות אלו משתנה מעבר וספיקת החום היא משתנה הדרך.

**נגד תרמי אידיאלי** הוא התקן שקצב זרימת החום דרכו פרופורציוני להפרש הטמפרטורות בין שני הדקיו:

$$(1.22) \quad q = \frac{1}{R} \{ T_1 - T_0 \}$$

$q$  ספיקת החום (קצב זרימת החום),  $T_1$  ו-  $T_0$  הן טמפרטורות ההדקים ו- $R$  ההתנגדות התרמית. **קבל חום אידיאלי** הוא התקן אשר כמות החום האגורה בו פרופורציונית להפרש הטמפרטורות  $T$  בינו לבין הסביבה:  $Q = CT$  כאשר  $C$  קבול החום. המשוואה ניתנת להכתב בצורה:

$$(1.23) \quad q = C \frac{dT}{dt}$$

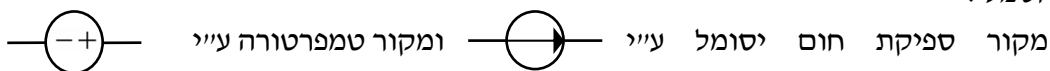
כש- $q$  היא ספיקת החום לקבל ו-  $\frac{dT}{dt}$  הוא קצב שנוי הטמפרטורה שלו.

**מקור טמפרטורה אידיאלי** מקיים טמפרטורה קבועה מראש בין הדקיו - בלי תלות בספיקת החום דרכו.

**מקור ספיקת חום אידיאלי** מספק כמות חום קבועה מראש - בלי תלות בהפרש הטמפרטורות בין הדקיו.

מערכות תרמיות מסוימות ניתנות לייצוג ע"י האלמנטים האידיאליים שהוזכרו. נשרטט **תרשים תרמי** באופן הבא:

נקבע עבור נגד תרמי את הסימול המקובל עבור נגד חשמלי, ועבור קבל תרמי את הסמל של קבל חשמלי.



בסמלים לקבל התרמי ולמקור ספיקת החום, יציין אחד ההדקים טמפרטורת יחוס. נחבר בקוים את כל הנקודות הנמצאות בשווי משקל תרמי זו לזו - במילים אחרות - את כל הנקודות שוות הטמפרטורה.

חוקי התרמודינמיקה ישתקפו בתרשים התרמי בשני החוקים הבאים:

א. סכום הפרשי הטמפרטורות סביב לולאה סגורה שווה לאפס.

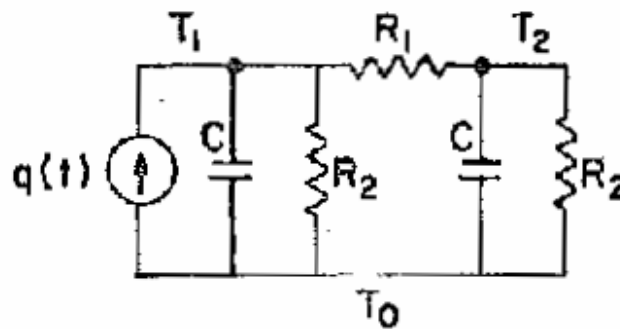
ב. סכום ספיקות החום הנכנסות לצומת שווה לאפס.

האנלוגיה בין המודל שבנינו לבין מערכות חשמליות, מביאה לידי כך שניתן לנתח את התרשים התרמי באמצעות הכלים המשמשים לניתוח תרשימים חשמליים: נחליף נגד תרמי בנגד חשמלי, קבל תרמי בקבל חשמלי, מקור ספיקת חום במקור זרם ומקור טמפרטורה במקור מתח.

**דוגמא 1.6:** לשני אקווריומים דופן משותפת. ההתנגדות למעבר חום של הדופן המשותפת -  $R_1$ . ההתנגדות התרמית הכוללת של שאר הדפנות של כל אקוריום היא  $R_2$ . קבול החום של כל אקוריום הוא  $C$ . באחד האקווריומים שהטמפרטורה בו היא  $T_1$  מצוי גוף חימום שספיקת החום שלו  $q(t)$ . שרטט תרשים תרמי עבור המערכת, ומצא משוואה עבור הטמפרטורה  $T_2$  באקוריום השני.

כדי לפשט את הדיון, נניח שקבול החום של דפנות האקוריום זניח; כמוכן נניח שהטמפרטורה בתוך כל אקוריום אחידה - בוחשים את המים בהתמדה.

נגדיר את טמפרטורות האקווריומים  $T_1, T_2$  ואת טמפרטורת הסביבה  $T_0$  (נניח שהיא קבועה). התרשים התרמי הוא:



המשוואה לצומת  $T_1$  היא:

$$q(t) = C \frac{dT_1}{dt} + \frac{T_1 - T_0}{R_2} + \frac{T_1 - T_2}{R_1}$$

המשוואה לצומת  $T_2$  היא:

$$\frac{T_1 - T_2}{R_1} = C \frac{dT_2}{dt} + \frac{T_2 - T_0}{R_2}$$

ע"י הצבת  $T_1$  לפי המשוואה השנייה במשוואה הראשונה ניתן לקבל את המשוואה המבוקשת:

$$q(t) + \frac{1}{R_2} \left[ \frac{R_1}{R_2} + 2 \right] T_0 = R_1 C^2 \frac{d^2 T_2}{dt^2} + 2C \left[ \frac{R_1}{R_2} + 1 \right] \frac{dT_2}{dt} + \frac{1}{R_2} \left[ \frac{R_1}{R_2} + 2 \right] T_2$$

למשוואה זו יש לצרף את תנאי ההתחלה  $T_2(0)$  ו-  $\frac{dT_2}{dt}(0)$ .

ניתן לקבל את שניהם מידיעת הטמפרטורות ההתחלתיות של האקווריומים.

## 1.5. מערכות זרימה

במערכות זרימה משתנה הדרך היא ספיקת הנוזל Q ומשתנה המעבר הוא הלחץ P. עבור מערכות זרימה פשוטות ניתן לבנות מודל הכולל "נגד הידראולי אידיאלי", "קבל הידראולי אידיאלי", "משרן הידראולי אידיאלי", "מקור ספיקה אידיאלי" ו"מקור לחץ אידיאלי".

**נגד הידראולי אידיאלי** הוא ההתקן אשר ספיקת הנוזל דרכו פרופורציונית להפרש הלחצים בין הדקיו:

$$(1.24) \quad Q = K\Delta P$$

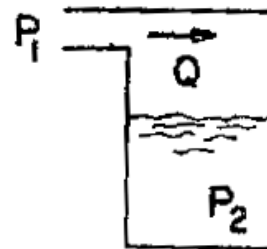
זוהי אידיאליזציה לאחת מהתכונות של צינור. התקן זה אנלוגי לנגד החשמלי, כאשר K ממלא תפקיד של "מוליכות הידראולית".

**קבל הידראולי אידיאלי** הוא אידיאליזציה של מיכל קבול לנוזל, והוא אנלוגי לקבל במערכות חשמליות: בהתקן זה מתקיים:

$$(1.25) \quad \Delta P = \frac{1}{C} \int Q dt$$

נתאר מיכל קבול גלילי לנוזל שצפיפותו  $\rho$ . נניח ששטח החתך של המיכל A. אם הספיקה לתוך המיכל היא Q, הפרש הלחצים בין קרקעית המיכל לראשו, הינו הלחץ ההידרוסטטי, יתקבל לפי:

$$\Delta P = P_2 - P_1 = \rho gh = \frac{\rho g V}{A} = \frac{\rho g}{A} \int Q dt$$



כאשר V נפח המיכל, h גובה פני הנוזל ו- $\rho$  היא צפיפותו.

**משרן הידראולי אידיאלי** הוא התקן המייצג תכונה נוספת של צינור. מתקיים בו הקשר:

$$(1.26) \quad \Delta P = L_H \frac{dQ}{dt}$$

נתבונן בצינור שארכו  $\ell$  ושטח החתך שלו A; בצינור זורם נוזל בעל צפיפות  $\rho$ . כאשר מופעל כוח על הנוזל שבצינור הוא מואץ - בהתאמה לחוק השני של ניוטון.

$$F = \Delta P \cdot A = ma = \rho V \frac{dv}{dt} = \rho \ell A \frac{dv}{dt} = \rho \ell \frac{d(Av)}{dt} = \rho \ell \frac{dQ}{dt}$$

$$\Rightarrow \Delta P = \frac{\rho \ell}{A} \frac{dQ}{dt} = L_H \frac{dQ}{dt}$$

(בפיתוח הנחנו  $A = \text{const}$ ).

**מקור לחץ אידיאלי** הוא מודל אידיאלי למשאבה המקיימת הפרש לחצים קבוע בין מוצאה לבין כניסתה.

**מקור ספיקה אידיאלי** הוא מודל אידיאלי למשאבה אשר מקיימת ספיקה קבועה מראש דרכה. כעת נוכל לשרטט תרשים הידראולי אשר בו מופיעים האלמנטים האידיאליים שצינו זה עתה. נחבר בקוים את כל הנקודות שהלחץ בהן זהה.

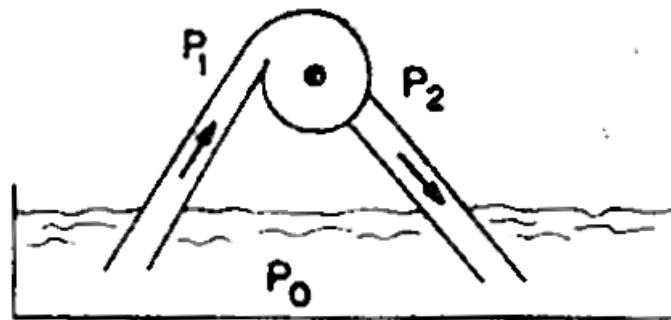
חוקי ההידראוליקה ישתקפו בחוקי הרשת הבאים:

א. סכום הספיקות הנכנסות לצומת הוא אפס.

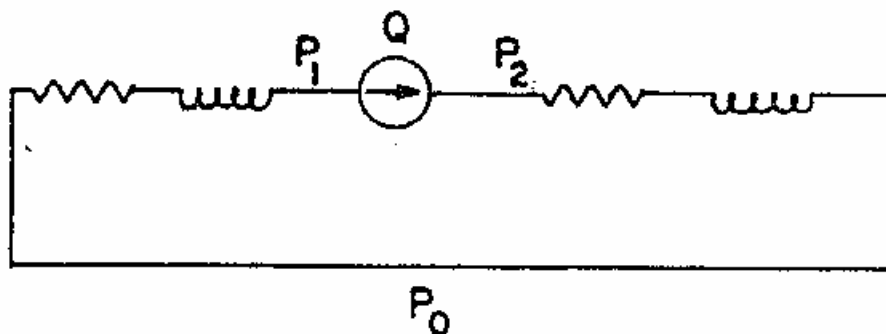
ב. סכום מפלי הלחצים סביב כל לולאה סגורה שווה לאפס.

גם עבור מערכות זרימה ניתן לשרטט תרשים חשמלי אקויוולנטי, כאשר הזרם אנלוגי לספיקה והפרש פוטנציאלים (מתח) להפרש לחצים. הפתרון שיתקבל עבור המערכת החשמלית האקויוולנטית יהא תקף במערכת הזרימה המקורית.

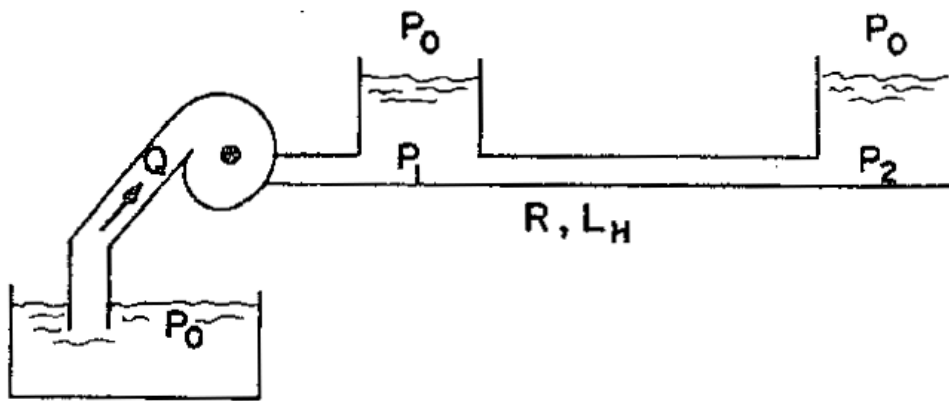
**דוגמא 1.7:** הציור מתאר משאבה בעלת ספיקה  $Q$  השואבת מים ממאגר ומחזירה אותם לאותו מאגר. שרטט דיאגרמה אקויוולנטית עבור המערכת, תוך התעלמות מהשפעות כוח הכובד.



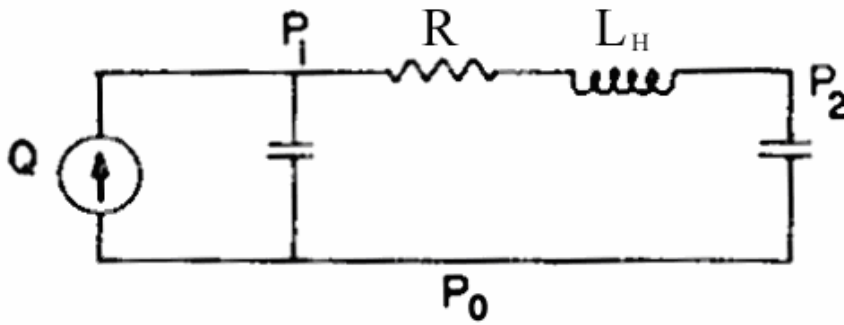
הדיאגרמה האקויוולנטית המתאימה מתארת את המשאבה כמקור ספיקה אידיאלי, ומייחסת התנגדות והשראות הידראולית לכל אחד משני הצינורות שבמערכת.



**דוגמא 1.8:** משאבה בעלת ספיקה  $Q$  שואבת מים ממאגר לשני מאגרים אחרים. שרטט דיאגרמה אקויוולנטית עבור המערכת. יחס התנגדות והשראות הידראוליים רק לצינור המחבר בין שני המאגרים האחרונים.



הדיאגרמה האקויוולנטית המתאימה היא:



נסכם בטבלה הבאה את האנלוגיה בין הסוגים השונים של המערכות הפיסיקליות, בהן טיפלנו.

מערכת זרימה	מערכת תרמית	מערכת מכנית סיבובית	מערכת מכנית טרנסלטורית	מערכת חשמלית	
הפרש לחצים P	הפרש טמפרטורות T	הפרש מהירויות זוויתיות $\omega$	הפרש מהירויות u	מתח V	משתנה מעבר
ספיקה Q	ספיקת חום q	מומנט $\tau$	כח f	זרם i	משתנה דרך
"נגד הידראולי" $\Delta P = \frac{1}{K} Q$  $\Delta P = L_H \frac{dQ}{dt}$ $L_H = \frac{\rho l}{A}$  מיכל קבול $Q = C_H \frac{dP}{dt}$ $C_H = \frac{A}{\rho g}$	מוליך חום $\Delta T = \frac{1}{K} q$  קבל חום $q = C \frac{dT}{dt}$	מרסן $\omega = \frac{1}{B} \tau$  מוט פתול $\omega = \frac{1}{K} \frac{d\tau}{dt}$  אינרציה $\tau = I \frac{d\omega}{dt}$	מרסן $u = \frac{1}{B} f$  קפיץ $u = \frac{1}{k} \frac{dF}{dt}$  מסה $F = m \frac{du}{dt}$	נגד $V = Ri$  משרן $V = L \frac{di}{dt}$  קבל $i = C \frac{dV}{dt}$	אלמנטים

### 1.6. מקורות מבוקרים

כפי שצינו בתחילת הפרק, מקובל להשתמש במשפחה מיוחדת של מקורות אידיאלים, אשר בהם המוצא תלוי במשתנה מסוים במערכת. מקורות מבוקרים עשויים, כפי שנוכח, לסייע לנו במידול תופעות פיסיקליות והתקנים מסוימים, שלא ניתנים למידול באמצעות האלמנטים איתם פעלנו עד כה.

מקורות מבוקרים שימושיים בכל סוגי המערכות; למען הפשטות נציג תחילה מקורות מבוקרים במערכות חשמליות.

קיימים ארבעה סוגים של מקורות מבוקרים:

**מקור מתח מבוקר מתח** הוא התקן אשר מתח הדקו  $V_0$  תלוי ביחס ישר במתח כלשהו במערכת  $V'$ :

$$V_0 = \mu V'$$

**מקור מתח מבוקר זרם** הוא התקן אשר מתח הדקו  $V_0$  תלוי ביחס ישר בזרם כלשהו במערכת  $I'$ :

$$V_0 = r m I'$$



מקור זרם מבוקר זרם הוא התקן אשר הזרם דרכו  $I_0$  תלוי ביחס ישר בזרם כלשהו במערכת  $I'$ :

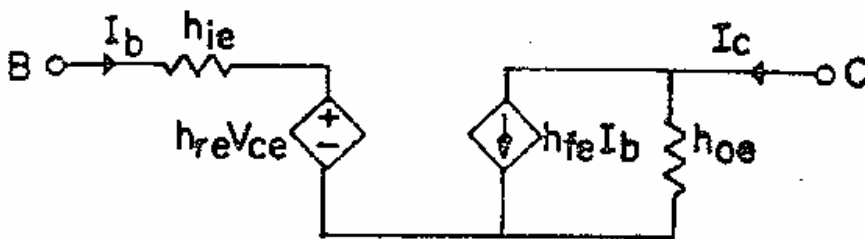
$$I_0 = \alpha I'$$

מקור זרם מבוקר מתח הוא התקן אשר הזרם דרכו  $I_0$  תלוי ביחס ישר במתח כלשהו במערכת  $V'$ :

$$I_0 = g_m V'$$

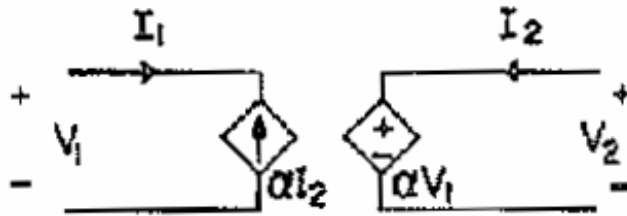
### דוגמא 1.9:

התרשים הבא הוא מודל שימושי עבור טרנזיסטור בחלק מתחום פעולתו:



### 1.7. צמוד טרנספורמטורי וצמוד גירטורי

1.7.1. המערכת הבאה קרויה טרנספורמטור אידיאלי:

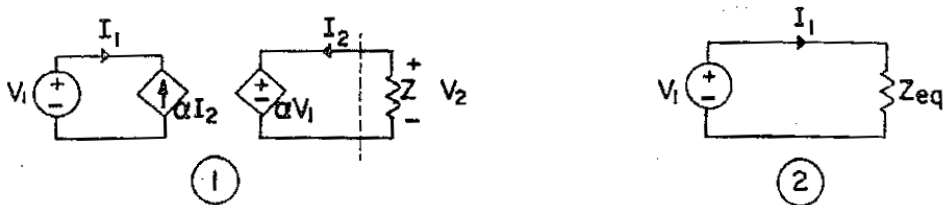


קל להוכיח שסך כל ההספק הנכנס למערכת שווה לאפס:

$$P_{\text{input}} = V_1 I_1 + V_2 I_2 = V_1 [-\alpha I_2] + \alpha V_1 \cdot I_2 = 0$$

הקבוע  $\alpha$  נקרא יחס הטרנספורמציה.

דוגמא 1.10: במעגל מס' 1 נמדד זרם  $I_1$ . איזה אימפדנס  $Z_{\text{eq}}$  נחבר במעגל מס' 2 כדי למדוד גם בו זרם  $I_1$ ?



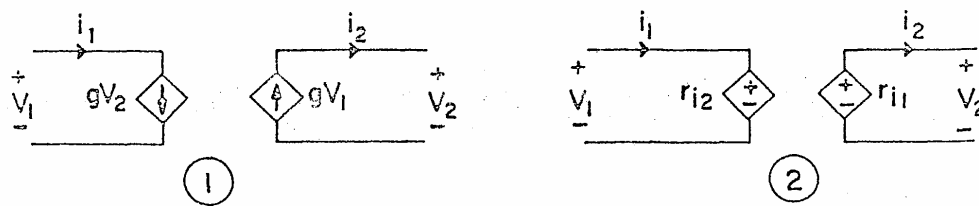
הבעיה היא למעשה "שיקוף" אימפדנס דרך טרנספורמטור:

$$(1.27) \quad Z_{eq} = \frac{V_1}{I_1} = \frac{V_2 / \alpha}{-\alpha I_2} = -\frac{1}{\alpha^2} \cdot \frac{V_2}{I_2} = -\frac{1}{\alpha^2} \cdot (-Z) = \frac{Z}{\alpha^2}$$

(סימני ה- המופיעים בחישוב מקורם בכיוונים המסכמים עבור המתחים והזרמים בתרשימים).

המערכת האידיאלית שחקרנו זה עתה היא מודל אידיאלי לטרנספורמטור חשמלי רגיל, בעל יחס לפופים  $\alpha$ . המודל האידיאלי לא מביא בחשבון הפסדים שונים והשראויות בטרנספורמטור הראלי: כדי להביאן בחשבון, ניתן להוסיף רכיבים למודל.

### 1.7.2. שתי המערכות הבאות קרויות גירטור אידיאלי:



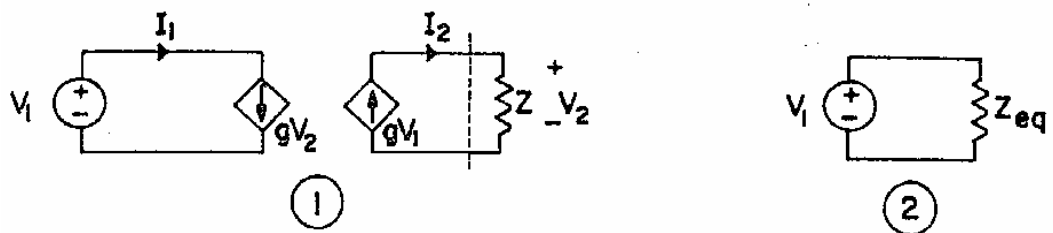
גם כאן, בשני המעגלים, סך כל ההספק הנכנס שווה לאפס. במעגל הראשון:

$$P_{input} = V_1 I_1 - V_2 I_2 = V_1 g V_2 - V_2 g V_1 = 0$$

ובמעגל השני:

$$P_{input} = V_1 I_1 - V_2 I_2 = r_{i2} i_1 - r_{i1} i_2 = 0$$

**דוגמא 1.11:** במעגל מס' 1 (למטה) נמדד זרם  $I_1$ . איזה אימפדנס  $Z_{eq}$  נחבר במעגל מס' 2 כדי למדוד גם בו זרם  $I_1$ ?



$$(1.28) \quad Z_{eq} = \frac{V_1}{I_1} = \frac{I_2 / g}{g V_2} = \frac{I_2}{V_2} \cdot \frac{1}{g^2} = \frac{1}{Z g^2} = \frac{\bar{Z}}{|Z|^2 g^2}$$

$\bar{Z}$  הוא הצמוד של  $Z$ .

בצורה דומה, אם נשתמש בגירטור שבו מקורות מתח מבוקרים עם מקדם  $r$  נקבל:

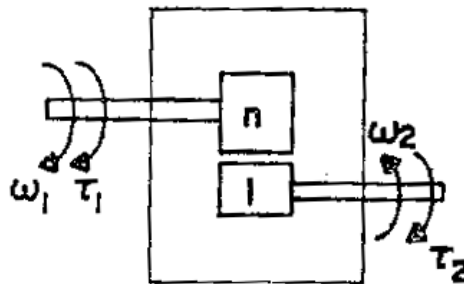
$$(1.29) \quad Z_{eq} = \frac{r^2 \bar{Z}}{|Z|^2}$$

1.8. מודלים מיוחדים

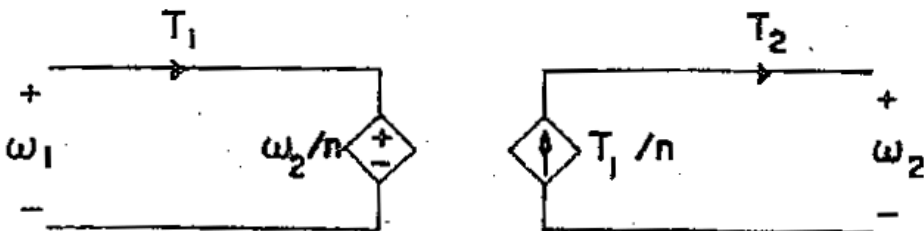
נתאר כאן מודלים אידיאליים עבור מספר מתקנים הנדסיים שימושיים, הכוללים צמוד טרנספורמטורי או גירטורי.

1.8.1. תיבת תמסורת אידיאלית

תיבת התמסורת הפשוטה ביותר היא שני גלגלי שניים הצמודים זה לזה, שיחס שיניהם  $1:n$ . בתיבת תמסורת אידיאלית אין תופעות של אלסטיות (פיתול), ואין חיכוך. כמו כן, מזניחים את האינרציה של הצירים ושל גלגלי השיניים.



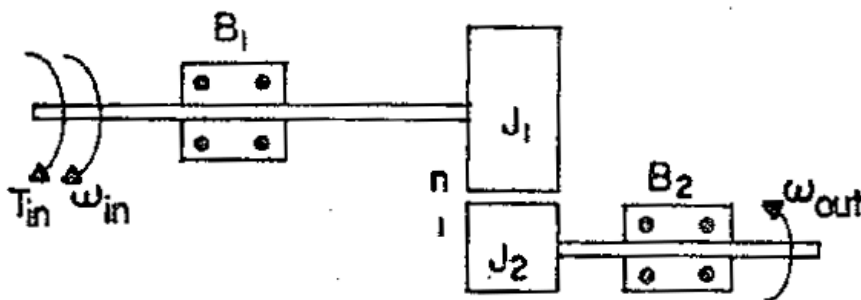
הדיאגרמה המכאנית של המודל היא:



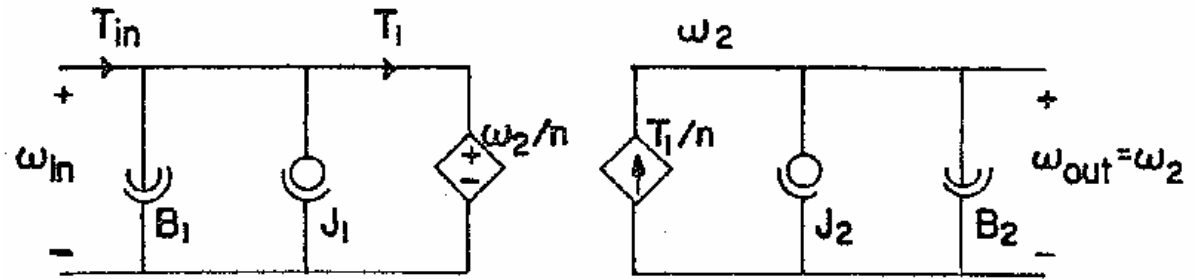
זהו צמוד טרנספורמטורי.

תופעות של חיכוך, אינרציה ופיתול ניתן לכלול ע"י הוספת רכיבים מכניים מתאימים לתרשים.

דוגמא 1.12: הציור מתאר תמסורת גלגלי שיניים. מצא דיאגרמה אקווילנטית עבור המערכת שתייצג את האינרציה של גלגלי השיניים ואת הרסון במיסבים. יחס השיניים בגלגלים הוא:  $1:n$ .



הדיאגרמה האקויוולנטית המתאימה כוללת טרנספורמטור אידיאלי בתוספת רכיבים המייצגים את הריסון ואת האינרציות.

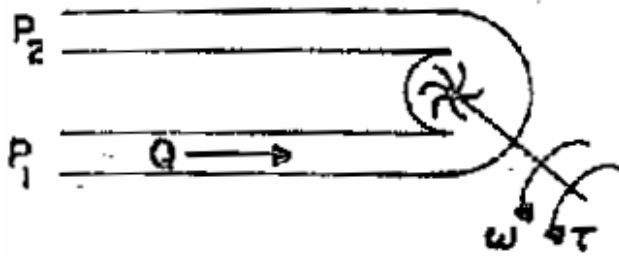


**1.8.2. טורבינה (משאבה צנטריפוגלית) אידיאלית**

התקן זה עשוי לקבל עבודה מכנית סיבובית ולבצע עבודה על נוזל (ואז הוא מתפקד כמשאבה); כמו כן, הוא עשוי לקבל עבודה מנוזל, ולבצע עבודה מכנית סיבובית (ואז הוא מתפקד כטורבינה).

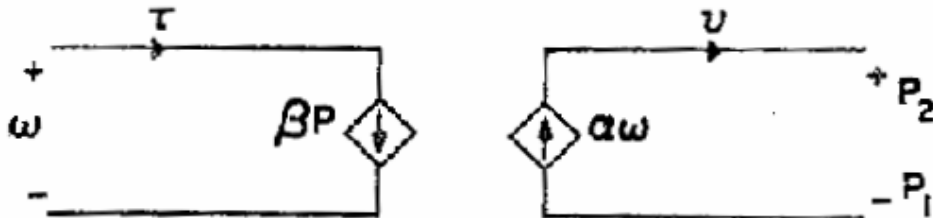
בטורבינה אידיאלית המומנט פרופורציוני ללחץ הנוזל והמהירות הזוויתית פרופורציונית לספיקה.

המשוואות הן:  $Q = \alpha \omega$  ו-  $T = \beta \Delta P$ , כאשר  $\alpha, \beta$  קבועים.

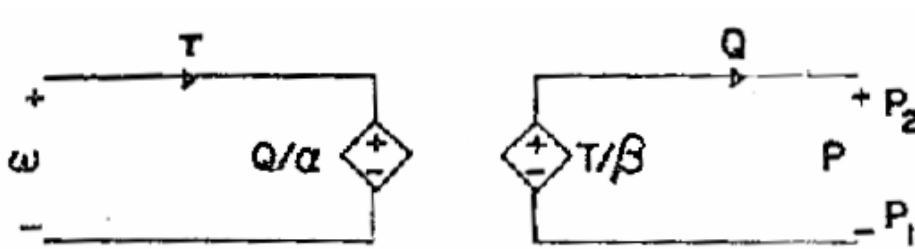


הפעלה כמשאבה:  $P_2 > P_1$

הצמוד בתרשים המודל הוא גירטורי:



או באמצעות המעגל האלטרנטיבי:



במשאבה שבה אין אבדן הספק חייב להתקיים  $\alpha = \beta$ . (אז סכום ההספקים הנכנסים שווה לאפס).

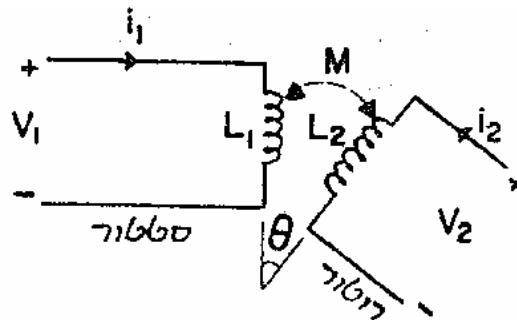
במשאבה פיסיקלית אין להתעלם מתופעות של חיכוך במיסב הציור, החלקת הנוזל על פני הלהבים, אינרציה של הלהבים, פתול בציר ועוד. תופעות כגון אלו, ניתנות לתאור ע"י תוספת של אלמנטים סטנדרטיים לתרשים.

### 1.8.3. מנוע לזרם ישר

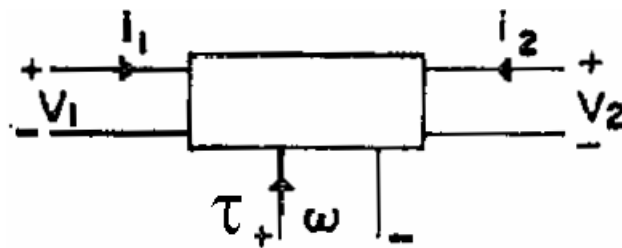
במנוע לזרם ישר סליל הרוטור נע ביחס לסליל הסטטור, ונניח שההשראה ההדדית ביניהם  $M$  נתונה ע"י  $M = M_0 \cos \theta$  הזווית בין הסלילים.

$$(1.30) \quad V_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + \frac{d(Mi_2)}{dt}$$

$$(1.31) \quad V_2 = \frac{d(Mi_1)}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt}$$



המנוע הוא התקן בעל 3 זוגות הדקים: שני זוגות הדקים חשמליים וזוג הדקים מכני.



עבור  $\theta$  מסוימת, האנרגיה האצורה בסלילים היא:

$$(1.32) \quad dw_s(i_1, i_2, \theta) = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M(\theta) i_1 i_2$$

נגזור את (1.32) וע"י שימוש במשוואות (1.30), (1.31) נקבל את ההספק המתוסף בכל רגע:

$$(1.33) \quad \frac{dw_s}{dt} = L_1 i_1 \frac{di_1}{dt} + L_2 i_2 \frac{di_2}{dt} + M(\theta) \left[ i_1 \frac{di_2}{dt} + i_2 \frac{di_1}{dt} \right] + i_1 i_2 \frac{dM(\theta)}{dt} = V_1 i_1 + V_2 i_2 - i_1 i_2 \frac{dM(\theta)}{dt}$$

ההספק הנמסר למנוע ניתן גם ע"י:

$$(1.34) \quad \frac{dw_s}{dt} = V_1 i_1 + V_2 i_2 + \tau \omega$$

מהשוואת שתי הנוסחאות האחרונות נקבל:

$$(1.35) \quad \tau \omega = -i_1 i_2 \frac{dM(\theta)}{dt} = -i_1 i_2 \frac{dM(\theta)}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = i_1 i_2 \omega M_0 \sin \theta$$

$$(1.36) \quad \tau = i_1 i_2 M_0 \sin \theta$$

קל לראות שהן המומנט הממוצע והן ההספק המכני הממוצע הנמסר למנוע, שווים לאפס. כדי להפיק הספק מכני מן המנוע שאינו שווה בממוצע לאפס, נחבר התקן הקרוי "קומוטטור" בין סליל הרוטור לבין הדקו באופן שזרם הרוטור  $I_a$  ינתן ע"י:

$$(1.37) \quad I_a = \begin{cases} -i_2 & 0 < \theta < \pi \\ i_2 & \pi < \theta < 2\pi \end{cases}$$

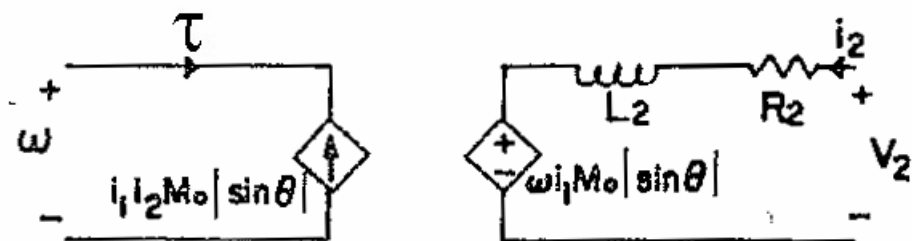
נקבל:

$$(1.38) \quad \tau \omega = i_1 I_a \omega M_0 \sin \theta = i_1 i_2 \omega M_0 |\sin \theta|$$

$$(1.39) \quad \tau = -i_1 i_2 M_0 |\sin \theta|$$

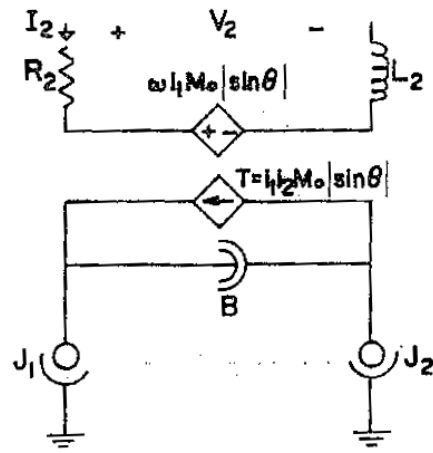
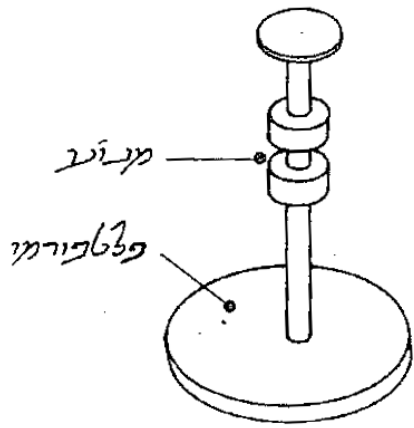
עתה ההספק הממוצע הנמסר ע"י המנוע חיובי ( $\tau \omega$  שלילי).

הדיאגרמה האקויוולנטית של המנוע היא:



לא שרטטנו את מעגל הסטטור מכיוון שהזרם בו  $i_1$ , נשמר בדרך כלל קבוע.

**דוגמא 1.13:** מנוע אינרציה הינו מנוע לזרם ישר המעוגן בפלטפורמה ומסובב את הרוטור ביחס אליה. שרטט דיאגרמה אקווילנטית עבור המערכת; הזנח את מומנט האינרציה של המנוע ואת החיכוך בין הרוטור לסביבה ובין הפלטפורמה לסביבה - אך כלול בדיאגרמה את החיכוך במיסבי המנוע.







## 2. מערכות לינאריות בזמן רציף

### 2.1. מבוא

בפרק זה נפתור משוואות דיפרנציאליות רגילות, לינאריות שמקדמיהן קבועים. משוואה דיפרנציאלית רגילה היא משוואה אשר כוללת נגזרות לפי משתנה בלתי תלוי אחד בלבד. במשוואות שאנו נפתור יופיעו שני משתנים תלויים - העירור והתגובה - ומשתנה בלתי תלוי אחד - זמן (כל הנגזרות תהיינה לפי הזמן). משוואה דיפרנציאלית לינארית היא משוואה שמופיעים בה רק ביטויים ממעלה ראשונה של המשתנים התלויים. משוואה דיפרנציאלית שמקדמיה קבועים היא משוואה שבה המקדמים הכופלים את הביטויים של המשתנים התלויים הם קבועים (אינם משתנים בזמן). לשלושת המאפיינים המתמטיים האלה יש משמעות פסיקלית עמוקה. חקירה יסודית של מערכת מעשית תגלה שתגובת המערכת עשויה להיות תלויה במשתנים בלתי תלויים אחדים, ולא רק בזמן. נוכל להזניח את התלות במשתנים הנוספים רק אם השפעתם על תגובת המערכת קטנה מאוד, או אם נפתור את הבעיה בתחום בו המשתנים הנוספים הם קבועים. ההזנחה הזאת תוביל אותנו למשוואות דיפרנציאליות רגילות.

**דוגמא:** זמן התנודה של שעון מטוטלת תלוי בטמפרטורה - כי אורך הזרוע תלוי בטמפרטורה; ובמיקום - כי  $g$  תלוי במיקום. בחישוב המקובל אנו מניחים  $g=9.8 \text{ m/sec}^2$ , ומתעלמים מהשפעת הטמפרטורה - כי על פני כדור הארץ  $g$  בערך קבוע, והשפעת השינויים בטמפרטורת החדר על אורך הזרוע מועטת.

משוואה דיפרנציאלית לינארית מתארת עירור ותגובה המקיימים את **עקרון הסופרפוזיציה**:

$$\text{אם } y_i(t) \text{ היא התגובה לעירור } f_i(t) \text{ אז התגובה לעירור } \sum_{i=1}^k a_i f_i(t) \text{ היא } \sum_{i=1}^k a_i y_i(t).$$

משוואה דיפרנציאלית שמקדמיה קבועים היא משוואה המתארת מערכת שהמבנה שלה והתכונות של רכיביה אינם משתנים בזמן (מערכת הכוללת קבל סיבובי שקיבולו משתנה מרגע לרגע לא ניתנת לתיאור ע"י משוואה דיפרנציאלית שמקדמיה קבועים).

## 2.2 משפחת הפונקציות הסינגולריות

פונקציות אלו שימושיות מאוד בטיפול במערכות.

(1) פונקצית מדרגת יחידה:

$$\delta_{-1}(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

(2) פונקצית השיפוע:

$$\delta_{-2}(t) = \int_{-\infty}^t \delta_{-1}(\tau) d\tau = \begin{cases} t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

(3)  $\delta_{-3}(t)$  היא האינטגרל של  $\delta_{-2}(t)$  וכו'.

(4) פונקצית ההלם של דיראק (פונקצית אימפולס):

$$\delta(t) = \frac{d}{dt} \delta_{-1}(t)$$

$$(2.1) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(t) dt = 1 \quad \begin{cases} \delta(t) \rightarrow \infty & t = 0 \\ \delta(t) = 0 & t \neq 0 \end{cases}$$

בפונקציה זו מתקיימות התכונות:

$$(2.2) \quad \delta(t)F(t) = \delta(t)F(0)$$

$$(2.3) \quad f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$$

(5) פונקצית הדובלט:

$$\delta_1(t) = \frac{d}{dt} \delta(t)$$

## 2.3 פתרון שיטתי בתחום הזמן

2.3.1. המשואה הכללית שנפתור היא:

$$(2.4) \quad \sum_{k=0}^n a_k y^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^m b_k u^{(k)}(t); m \leq n$$

כאשר  $y(t)$  היא התגובה ו-  $u(t)$  הוא העירור.

קיימים  $n$  תנאי התחלה:  $y(0) \dots y^{(n-1)}(0)$ .

נניח שהמשוואה היא בצורתה המצומצמת:  $a_n = 1$ . בדרך כלל נקבל  $m < n$ . ניתן להראות שלבעיה זו קיים פתרון אחד ויחיד, עם  $n$  תנאי ההתחלה הנתונים. את פונקצית הפתרון למשוואה,  $y(t)$ , ניתן לפצל לשני רכיבים:

$$(2.5) \quad y(t) = y_i(t) + y_u(t)$$

$y_i(t)$  היא הפונקציה הפותרת את הבעיה ההומוגנית:

$$(2.6) \quad \sum_{k=0}^n a_k y^{(k)}(t) = 0$$

ותנאי ההתחלה הנתונים.

$y_i(t)$  הוא החלק בפתרון הנובע מתנאי ההתחלה, והוא קרוי **התגובה לתנאי ההתחלה**.  $y_u(t)$  היא הפונקציה שפותרת את משוואה (2.4) עבור ערכים התחלתיים שכולם אפס:  $y(0) = 0, y^{(1)}(0) = 0 \dots y^{(n-1)}(0) = 0$ .  $y_u(t)$  קרוי **התגובה לעירור**.

2.3.2. ראשית נפתור את הבעיה ההומוגנית, היינו נמצא את התגובה לתנאי ההתחלה.

$$(2.7) \quad \sum_{k=0}^n a_k y^{(k)}(t) = 0 \quad y(0) : y^{(1)}(0), \dots, y^{(n-1)}(0)$$

ננסה למצוא פתרון מהצורה:

$$y_i(t) = Ae^{\lambda t}$$

כאשר  $A, \lambda$  קבועים.

נציב את הביטוי במשוואה (ההומוגנית):

$$(2.8) \quad \sum_{k=0}^n a_k A \lambda^k e^{\lambda t} = Ae^{\lambda t} \sum_{k=0}^n a_k \lambda^k = 0$$

דרך אחת לקיים את המשוואה היא  $A = 0$  או  $y_i(t) = 0$ . פתרון זה יקיים את תנאי ההתחלה רק אם כל ערכי ההתחלה הם אפס. (ואכן, אז אין תגובה לתנאי ההתחלה).

דרך שניה לקיים את המשוואה היא לדרוש ש-  $\lambda$  יקיים את התנאי:

$$(2.9) \quad \sum_{k=0}^n a_k \lambda^k = 0$$

תנאי זה קרוי **המשוואה האופיינית**, והפולינום ב- $\lambda$ ,  $\sum_{k=0}^n a_k \lambda^k$ , קרוי **הפולינום האופייני**.

אם  $\lambda = \lambda_0$  פותר את המשוואה האופיינית, אז  $Ae^{\lambda_0 t}$  פותר את המשוואה ההומוגנית.

2.3.2.1. נניח שלמשואה האופיינית יש  $n$  שרשים שונים (כלומר לשורשים אין כפילות):

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$$

קיימת קבוצה של  $n$  פונקציות בלתי תלויות ליניארית:

$$\{e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_n t}\}$$

אשר כל אחת מהן מהווה פתרון למשוואה. קבוצה זו קרויה **הקבוצה היסודית** של הפתרונות למשוואה, והיא מהווה **בסיס למרחב הפתרונות** של המשוואה: כל קומבינציה ליניארית של הפונקציות האלה מהווה פתרון למשוואה ההומוגנית (מעקרון הסופרפוזיציה), וניתן להראות שכל פתרון למשוואה ההומוגנית הוא קומבינציה ליניארית של הפונקציות מהקבוצה היסודית.

הפתרון הכללי של המשוואה ההומוגנית כאן הוא:

$$(2.10) \quad y_i(t) = \sum_{j=1}^n C_j e^{\lambda_j t}$$

ועלינו לבחור מקדמים  $C_j$  כאלה שיתאימו לתנאי ההתחלה.

עבור  $n$  המקדמים מקבלים מערכת של  $n$  משוואות:

$$(2.11) \quad \begin{cases} y_i(0) = \sum_{\ell=1}^n C_\ell \\ y_i^{(1)}(0) = \sum_{\ell=1}^n C_\ell \lambda_\ell \\ y_i^{(n-1)}(0) = \sum_{\ell=1}^n C_\ell \lambda_\ell^{n-1} \end{cases}$$

מערכת זו יכולה להיכתב בכתוב מטריוציאלי באופן הבא:

$$(2.12) \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_i(0) \\ y_i^{(1)}(0) \\ \vdots \\ y_i^{(n-1)}(0) \end{bmatrix}$$

המטריצה הריבועית נקראת **מטריצת ונדרמונדה**. הוקטור שבאגף ימין קרוי **וקטור תנאי ההתחלה**.

מערכת זו ניתנת לפתרון בדרכים המקובלות: בשיטת קרמר או ע"י פעולות שורה ועמודה, וכו'.

באופן כללי  $\lambda_k$  הוא מספר מרוכב:

$$(2.13) \quad \lambda_k = \sigma + j\omega$$

$$(2.14) \quad e^{\lambda_k t} = e^{\sigma + j\omega t} = e^{\sigma t} e^{j\omega t} = e^{\sigma t} [\cos(\omega t) + j \sin(\omega t)]$$

כאשר  $\sigma < 0$  אנו אומרים שהפתרון **דועך**. כאשר  $\sigma > 0$  אנו אומרים שהפתרון **“מתפוצץ”**.

פתרון מתפוצץ זר אמנם לבעיה פיסיקלית, שמטבעה אינה כוללת גדלים השואפים לאינסוף, אך בהחלט יתכן שלאחר ליניאריזציה של מערכת פיסיקלית לא ליניארית יתקבל מודל שהפתרון לו אינו חסום בזמן. במקרה זה תצא המערכת מתחום הליניאריות והמודל לא יהיה מעשי עוד. כאשר  $\omega = 0$  הפתרון הוא **אקספוננציאלי טהור**: אחרת אנו אומרים שלפתרון יש רכיב **“מתנדנד”**.

בבעיה פיסיקלית ערכי ההתחלה והמקדמים  $a_k$  הם מספרים ממשיים. לבעיה כזו נצפה לקבל פתרון  $y_i(t)$  שיהיה **ממשי**, ואכן ע”י שימוש בשוויון אוילר:

$$(2.15) \quad e^{j\phi} = \cos\phi + j\sin\phi$$

ניתן להראות שניתן להציג את כל החלקים בפתרון הכוללים חזקות דמיוניות ע”י פונקציות טריגונומטריות ממשיות. (ראה למשל הדיון בסעיף 4 בפרק זה).

**דוגמא 2.1:** מצא  $y_i(t)$  עבור המשוואה  $y^{(2)} + 5y^{(1)} + 6y = f(t)$  כאשר:

$$y^{(1)}(0) = 2, y(0) = 1.$$

המשוואה ההומוגנית היא:  $y^{(2)} + 5y^{(1)} + 6y = 0$ , והמשוואה האופיינית היא

$$\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0.$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 6}}{2} = \frac{-5 \pm 1}{2} \quad \lambda_1 = -2; \lambda_2 = -3$$

הקבוצה היסודית היא  $\{e^{-2t}, e^{-3t}\}$  והפתרון הכללי הוא  $ae^{-2t} + be^{-3t}$ .

נמצא  $a, b$  כאלה שיקיימו את תנאי ההתחלה:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

נפתור בשיטת קרמר:

$$a = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{-5}{-1} = 5 \quad b = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{4}{-1} = -4$$

$$y_i(t) = 5e^{-2t} - 4e^{-3t}$$

ובסה”כ:

2.3.2.2. עד כה הנחנו שלמשואה האופיינית יש  $n$  שרשים שונים (כלומר לשורשים אין

כפילות). אולם, יתכן שיופיעו שרשים עם כפילות. לדוגמא, למשוואה  $\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda = 0$  יש שני שרשים:  $\lambda_1 = 0$  ו-  $\lambda_2 = 1$ , כאשר ל-  $\lambda_2$  יש כפילות 2.

באופן כללי, למשוואה האופיינית יש  $r$  שרשים, באופן שלשרש  $\lambda_i$  יש כפילות  $\ell_i$ .

כעת:  $y_i = \sum_{k=0}^{\ell_i-1} x_{ik} t^k e^{\lambda_i t}$ , כאשר  $x_i$  מוגדר באופן הבא:

$$(2.16) \quad x_i = \sum_{k=0}^{\ell_i-1} A_{ik} t^k e^{\lambda_i t}$$

כאן הקבוצה היסודית כוללת  $n$  פונקציות מהצורה  $t^k e^{\lambda_i t}$ , כאשר  $k=0, \dots, n-1$ . במקרה כללי זה מערכת המשוואות למציאת המקדמים תהיה שונה מבמקרה הפרטי הקודם, אך עקרונות שיטת הפתרון יהיו זהים.

**דוגמא 2.2:** מצא  $y_i(t)$  עבור:

$$y^{(3)} - 2y^{(2)} + y^{(1)} = f(t)$$

כאשר:

$$y^{(2)}(0) = 3; y^{(1)}(0) = 2; y(0) = 2$$

המשואה האופיינית היא  $\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda = 0$ , והשורשים הם  $\lambda_1 = 0$  ו-  $\lambda_2 = 1$  עם כפילות 2. הקבוצה היסודית היא:

$$\{1, e^t, te^t\}$$

$$x_1(t) = A_1 e^{0t} = A_1$$

$$x_2(t) = A_{20} e^t + A_{21} te^t$$

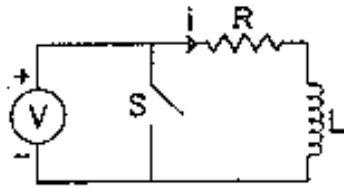
$$y(t) = A_1 + A_{20} e^t + A_{21} te^t$$

נמצא את המקדמים:

$$\begin{cases} y^{(0)}(0) = A_1 + A_{20} = 2 \\ y^{(1)}(0) = A_{20} + A_{21} = 2 \\ y^{(2)}(0) = A_{20} + 2A_{21} = 3 \end{cases}$$

מכאן  $A_{21} = A_{20} = A_1 = 1$  והפתרון הוא:  $y_i(t) = 1 + e^t + te^t$ . זהו כמובן פתרון שאינו חסום.

**דוגמא 2.3:** ברגע  $t = 0$ , אחרי שבמשך זמן רב זרם קבוע  $I_0$  במעגל, מקצרים את המקור באמצעות המתג  $s$ . מצא  $i(t)$  עבור  $t > 0$ .



$$Ri + L \frac{di}{dt} = 0 \quad ; \quad i(0) = I_0$$

כאן אין עירור, וממילא אין  $y_u(t)$ .

$$R + L\lambda = 0 \quad \text{מכאן} \quad \lambda = -\frac{R}{L}$$

הפתרון הכללי הוא:

$$y(t) = y_i(t) = Ae^{-\frac{R}{L}t}$$

כדי לקיים את התנאי  $y(0) = I_0$  יש להציב  $A = I_0$ . בסה"כ:

$$i(t) = y(t) = y_i(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}$$

**2.3.3.** השלב הבא בפתרון הוא מציאת  $y_u(t)$ , התגובה לעירור כאשר ערכי ההתחלה הם כולם אפס.

את  $y_u(t)$  ניתן להפריד לשני חלקים:

$$(2.17) \quad y_u(t) = y_{ss}(t) + y_t(t)$$

$y_{ss}(t)$  היא פונקציה קבועה או מחזורית בזמן והיא קרויה **הפתרון העמיד**.  $y_t(t)$  היא קומבינציה ליניארית של פונקציות מהקבוצה היסודית של המשואה - אותה קבוצה יסודית שמצאנו בפתרון לתנאי ההתחלה. תפקיד  $y_t(t)$  הוא להשוות את כל ערכי ההתחלה של  $y_u(t)$  לאפס. (ערכי ההתחלה של  $y_{ss}(t)$  הם לאו דווקא אפס, בעוד שערכי ההתחלה של  $y_u(t)$  חייבים להתאפס). הצורה הכללית של  $y_t(t)$  זהה לצורה הכללית של  $y_i(t)$ , אלא שהמקדמים יהיו שונים כמובן. כאשר  $y_{ss}(t)$  ידוע, ניתן לבנות את  $y_t(t)$  לפי ערכי ההתחלה של  $y_{ss}(t)$  ונגזרותיו. במערכת פיסיקלית  $y_t(t)$  הוא בדרך כלל פתרון דועך ועבור  $t \rightarrow \infty$  נקבל  $y_u(t) \rightarrow y_{ss}(t)$ . לכן, בדרך כלל  $y_t(t)$  קרוי **החלק החולף** בתגובה לעירור.

המשוואה הכללית היא :

$$(2.4) \quad \sum_{k=0}^n a_k y^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^m b_k u^{(k)}(t); m \leq n$$

והתגובה לעירור היא :

$$(2.18) \quad y_u(t) = y_{ss}(t) + \sum_{i=1}^n A_i e^{\lambda_i t}$$

כאשר  $\lambda_i$  הם שרשי המשוואה האופיינית (בהנחה שאין שרשים עם כפילות).

נניח ש  $y_{ss}(t)$  ידוע לנו. המקדמים  $A_i$  יתקבלו במקרה כזה מהמערכת הבאה :

$$(2.19) \quad \begin{bmatrix} y_t(0) \\ \vdots \\ y_t^{(n-1)}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} y_{ss}(0) \\ \vdots \\ y_{ss}^{(n-1)}(0) \end{bmatrix}$$

כאשר המטריצה הריבועית היא כמובן מטריצת ה-ונדרמונדה של המשוואה.

**דוגמא 2.4 :** מצא  $y_u(t)$  עבור המשוואה  $y^{(1)} + \frac{1}{\tau} y = \delta_{-1}(t)$  כאשר  $t \geq 0$

צורת הפתרון היא :

$$y_u(t) = y_{ss}(t) + Ae^{-t/\tau}$$

כאן קל לראות ש :

$$y_{ss}(t) = \tau$$

מאיפוס ערך ההתחלה של  $y_u$ ,  $y_u(0) = \tau + A = 0$ , מקבלים  $A = -\tau$ . בסה"כ :

$$y_u(t) = \tau - \tau e^{-t/\tau} = \tau [1 - e^{-t/\tau}]$$

נזכיר כאן שלוש תכונות חשובות של  $y_u(t)$  במשוואות שאנו פותרים, שתאפשרנה לנו לפשט

פתרונות לבעיות רבות :

(1) אם  $y_{u_k}(t)$  היא התגובה לעירור  $u_k(t)$ , אז התגובה לעירור  $\sum_k a_k u_k(t)$  היא

$$\sum_k a_k y_{u_k}(t)$$

(2) אם  $y_u(t)$  היא התגובה לעירור  $u(t)$ , אז התגובה לעירור  $u^{(n)}(t)$  היא  $y_u^{(n)}(t)$ .

(3) אם  $y_u(t)$  היא התגובה לעירור  $u(t)$ , אז  $y_u(t-t_0)$  היא התגובה לעירור  $u(t-t_0)$ .



המשוואה הכללית שאנו פותרים היא :

$$(2.4) \sum_{k=0}^n a_k y^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^m b_k u^{(k)}(t); m \leq n$$

נוכל לנצל את שתי התכונות הראשונות באופן הבא :  
אם ידוע לנו  $y^*(t)$ , שהוא פתרון התגובה לעירור במשוואה

$$(2.20) \sum_{k=0}^n a_k y^{(k)} = u$$

אז פתרון התגובה לעירור במשוואה הכללית (2.4) הוא :

$$(2.21) y_u = \sum_{k=0}^m b_k y^{*(k)}$$

נוכח שבמקרים רבים קל למצוא את  $y_u$  דרך  $y^*$  מאשר בצורה ישירה.

**דוגמא 2.5 :** מצא  $y_u(t)$  עבור :

$$y^{(1)} + \frac{1}{\tau} y = \delta_{-1}(t) + 5\delta(t)$$

כאשר  $t > 0$ .

בדוגמא 2.4 : מצאנו שהפתרון ל-  $y^{(1)} + \frac{1}{\tau} y = \delta_{-1}(t)$  הוא  $y^*(t) = \tau[1 - e^{-t/\tau}]$ .

מכאן :

$$y_u(t) = y^*(t) + 5y^{*(1)}(t) = \tau[1 - e^{-t/\tau}] + 5e^{-t/\tau}$$

בסעיפים הבאים נמצא תגובה לעירור עבור המשוואה :

$$(2.20) \sum_{k=0}^n a_k y^{(k)} = u$$

צעד ראשון לקראת פתרון ל- $u$  כללי הוא פתרון עבור :  $u = \delta(t) - 1$  ו-  $u = \delta_{-1}(t)$ .

2.3.4. נחפש את התגובה לעירור מדרגה :

$$(2.22) \sum_{k=0}^n a_k y^{(k)} = \delta_{-1}(t)$$

ע"י הצבה ישירה נוכח שהביטוי :

$$(2.23) y_u(t) = y_{-1}(t) = \left[ \frac{1}{a_0} + \sum_{i=1}^n A_i e^{\lambda_i t} \right] \delta_{-1}(t)$$

פותר את המשוואה (בהנחה של  $\{\lambda_i\}$ , שרשי המשוואה האופיינית אין כפילות).

את המקדמים  $A_i$  מגדירה המערכת:

$$(2.24) \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & & \lambda_n \\ \vdots & & & \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/a_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

כאן  $1/a_0$  הוא  $y_{ss}(t)$  והוא גודל קבוע. הקומבינציה של הפונקציות האקספוננציאליות היא החלק החולף  $y_t(t)$ .

אם לשורשי המשואה האופיינית יש כפילות, נקבל פתרון כללי:

$$(2.25) \quad y_{-1}(t) = \left[ \frac{1}{a_0} + \sum_{i=1}^r \sum_{k=0}^{\ell_i-1} A_{i_k} t^k e^{\lambda_i t} \right] \delta_{-1}(t)$$

כאשר שוב החלק החולף הוא קומבינציה ליניארית של פונקציות מהקבוצה היסודית. (בביטוי ל- $y_{-1}(t)$  היא מספר השורשים השונים של המשואה האופיינית, ו- $\ell_i$  הוא הכפילות של  $\lambda_i$ ).

המערכת לקבלת המקדמים תהיה שונה, אולם העיקרון ישמר: ערכי ההתחלה של  $y_{-1}(t)$  חייבים להתאפס כולם, ולפיכך ערכי ההתחלה של  $y_t(t)$  חייבים להיות כבמקרה הפרטי

$$\text{הקודם: } y_t(0) = -\frac{1}{a_0}; \quad y_t^{(i)}(0) = 0 \quad (1 \leq i \leq n-1)$$

**דוגמא 2.6:** מצא את  $y_{-1}(t)$ , התגובה לעירור מדרגה, עבור:

$$y^{(3)} + 3y^{(2)} + 3y^{(1)} + y = \delta_{-1}(t)$$

המשואה האופיינית היא:

$$\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0$$

ופתרונה הוא  $\lambda_1 = -1$  בכפילות  $\ell_1 = 3$ .

הקבוצה היסודית היא:

$$\{e^{-t}, te^{-t}, t^2e^{-t}\}$$

וצורת הפתרון היא:

$$y_{-1}(t) = [1 + a_1 e^{-t} + a_2 t e^{-t} + a_3 t^2 e^{-t}] \delta_{-1}(t)$$

מתנאי ההתחלה :

$$y_{-1}(0) = 1 + a_1 = 0 \Rightarrow a_1 = -1$$

$$y_{-1}^{(1)}(0) = -a_1 + a_2 = 0 \Rightarrow a_2 = a_1 = -1$$

$$y_{-1}^{(2)}(0) = a_1 - a_2 - a_2 + 2a_3 = 0 \Rightarrow a_3 = -0.5$$

$$y_{-1}(t) = \left[ 1 - e^{-t} - te^{-t} - \frac{1}{2}t^2e^{-t} \right] \delta_{-1}(t)$$

ובסה"כ :

מכיוון שפונקציות ההלם היא נגזרתה של פונקציות המדרגה, תגובת האימפולס של מערכת יכולה להתקבל ישירות ע"י גזירת תגובת המערכת למדרגה (ראה תכונה (2) – סעיף 2.3.3). אם עבור מערכת מסוימת :

$$(2.26) \quad y_{-1}(t) = \left[ \frac{1}{a_0} + y_t(t) \right] \delta_{-1}(t)$$

אז תגובת אותה מערכת לאימפולס היא :

$$(2.27) \quad y_0(t) = \left[ \left( \frac{1}{a_0} + y_t(t) \right) \delta_{-1}(t) \right]' = y_t'(t) \delta_{-1}(t) + \left( \frac{1}{a_0} + y_t(0) \right) \delta(t) = \\ = y_t'(t) \delta_{-1}(t) + 0 \cdot \delta(t) = y_t'(t) \delta_{-1}(t)$$

(כזכור  $(\delta(t)F(t) = \delta(t)F(0)$  ;

הביטוי  $\frac{1}{a_0} + y_t(0)$  מתאפס, מכיוון שזהו הערך ב  $t=0$  של  $y_{-1}$ , התגובה לעירור מדרגה.

2.3.5. העירור האימפולסי מתאפס עבור כל  $t \neq 0$ . לכן ניתן להתייחס לתגובה לאימפולס כאל תגובה למצב התחלתי מסוים שנוצר ב  $t=0$  ע"י האימפולס בעירור. נמצא ישירות את התגובה לאימפולס.

$$(2.28) \quad y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0y^{(0)} = \delta(t)$$

כדי לקיים את המשוואה ב-  $-\varepsilon < t < \varepsilon$  חייב  $y^{(n)}$  לכלול אימפולס. כמו כן, הוא עשוי לכלול אברים נוספים, בתנאי שערכם סופי ב-  $t = 0$ . (ואז הם לא מפריעים לאיזון המשוואה, כי ב-  $t = 0$  ערך שני אגפי המשוואה הוא אינסופי).

ב-  $t = -\varepsilon$  ( $\varepsilon \rightarrow 0$ ) ערך הפונקציה וכל נגזרותיה הוא אפס. אם  $y^{(n)}$  כולל אימפולס (ואברים סופיים נוספים), קיים  $y^{(n-1)}(\varepsilon) = 1$ , כי  $y^{(n-1)}(t)$  כולל פונקציות מדרגה והוא עשוי לכלול אברים נוספים שעריך כולם אפס ב-  $t = 0$ . ערכי הנגזרות מסדר נמוך יותר של התגובה ב  $t = \varepsilon$   $y^{(n-2)}(\varepsilon), \dots, y^{(0)}(\varepsilon)$  הם עדיין אפס כולם.

המסקנה שניתן להסיק מחקירה זו היא שתגובת האימפולס  $y_0(t)$  עבור  $t > 0$  במערכת

$$(2.29) \quad y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0y^{(0)} = \delta(t)$$

זהה ל-  $y_i(t)$ , התגובה לתנאי ההתחלה, כאשר:

$$(2.30) \quad y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0y^{(0)} = 0$$

תנאי ההתחלה הם

$$y^{(0)}(0) = 0, \dots, y^{(n-2)}(0) = 0, y^{(n-1)}(0) = 1$$

את הפתרון לבעיה זו אנו יודעים למצוא.

אם נניח שלמשואה האופיינית יש שרשים  $\lambda_i$  (ללא כפילות), נקבל:

$$(2.31) \quad y_0(t) = \sum_{i=1}^n A_i e^{\lambda_i t}$$

כאשר את המקדמים  $A_i$  ניתן למצוא לפי:

$$(2.32) \quad \left[ \begin{array}{c} V \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{array} \right]$$

כש-  $[V]$  היא מטריצת ונדרמונדה.

באופן כללי, אם למשואה האופיינית יש שרשים עם כפילות, ניקח בתור פתרון קומבינציה ליניארית של פונקציות מהקבוצה היסודית ונתאים את המקדמים לערכי ההתחלה של בעיית תנאי ההתחלה האקוויולנטית, שהם:

$$y(0) = 0, \dots, y^{(n-2)}(0) = 0, y^{(n-1)}(0) = 1$$

**דוגמא 2.7:** מצא את התגובה לעירור עבור:

$$y^{(2)} + 5y^{(1)} + 6y = \delta_0(t)$$

(1) דרך תגובת המדרגה.

המשואה האופיינית היא  $\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$  ושורשיה הם  $\lambda_1 = -3$ ,  $\lambda_2 = -2$ .

הפתרון הכללי לתגובת המדרגה:

$$y_{-1}(t) = \left[ \frac{1}{6} + a_1 e^{-3t} + a_2 e^{-2t} \right]$$

נמצא את המקדמים:

$$\begin{cases} y_{-1}(0) = \frac{1}{6} + a_1 + a_2 = 0 \\ y_{-1}^{(1)}(0) = -3a_1 - 2a_2 = 0 \end{cases}$$

מקבלים  $a_2 = -\frac{1}{2}, a_1 = \frac{1}{3}$

לקבלת  $y_0(t)$  נגזור את  $y_{-1}(t)$ :

$$y_0(t) = \frac{d}{dt}[y_{-1}(t)] = [-e^{-3t} + e^{-2t}]\delta_{-1}(t)$$

(2) דרך בעיית תנאי ההתחלה האקוויולנטית לבעייתנו.

$$y_0(t) = b_1 e^{-3t} + b_2 e^{-2t}$$

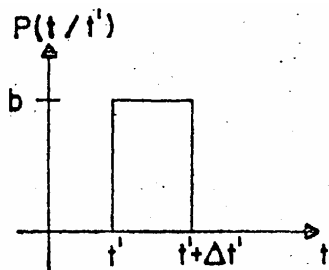
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ומקבלים, כצפוי,  $b_2 = 1, b_1 = -1$ .

2.3.6. נמצא את התגובה לעירור כללי  $u(t)$ .

ראשית נמצא את  $y_p(t/t')$ , התגובה לפולס (המתואר להלן) של המערכת:

$$(2.33) \quad y^{(n)} + \dots + a_0 y^{(0)} = u(t)$$



הפולס הוא הפרש של שתי פונקציות מדרגה:

$$P(t/t') = b\delta_{-1}(t-t') - b\delta_{-1}(t-t'-\Delta t')$$

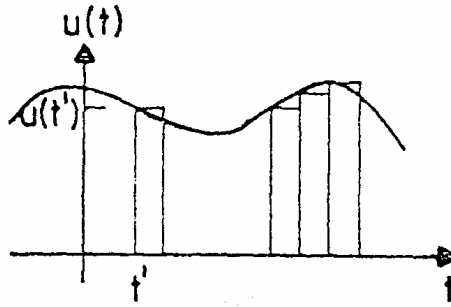
ולכן התגובה לפולס עבור  $t > t' + \Delta t'$  שווה להפרש התגובות לשתי פונקציות המדרגה.

נניח בלי הגבלת הכלליות ששורשי הפולינום האופייני של המערכת שונים זה מזה ונקבל:

$$\begin{aligned} y_p(t/t') &= b[y_{-1}(t-t') - y_{-1}(t-t'-\Delta t')] = \\ &= b \left[ \frac{1}{a_0} + \sum_{i=1}^n A_i e^{\lambda_i(t-t')} - \frac{1}{a_0} - \sum_{i=1}^n A_i e^{\lambda_i(t-t'-\Delta t')} \right] = \\ &= b \sum_{i=1}^n A_i [e^{\lambda_i(t-t')} - e^{\lambda_i(t-t'-\Delta t')}] = b \sum_{i=1}^n A_i e^{\lambda_i(t-t')} (1 - e^{-\lambda_i \Delta t'}) = \\ &= b \sum_{i=1}^n \left( A_i e^{\lambda_i(t-t')} \left[ \lambda_i \Delta t' - \frac{1}{2} (\lambda_i \Delta t')^2 + \dots \right] \right) \end{aligned}$$

הביטוי בסוגריים המרובעים הוא פתוח טיילור של  $1 - e^{-\lambda_i \Delta t'}$ .

כל פונקציה של הזמן ניתן לקרב לסכום של פולסים המופעלים בזה אחר זה, כשהאמפליטודה שלהם היא ערך הפונקציה ברגע  $t = t'$ , הרגע בו הם מופעלים. הקרוב יהיה מדויק עבור  $\Delta t' \rightarrow 0$ .



עבור  $\Delta t' \rightarrow 0$ :

$$(2.34) \quad y_p(t/t') \xrightarrow{\Delta t' \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [\lambda_i A_i e^{\lambda_i(t-t')}] \Delta t'$$

התגובה בזמן  $t$  לסך כל הפולסים המפעלים ברווח  $[0, t]$  היא סכום התגובות לפולסים הנפרדים, וכאשר  $\Delta t' \rightarrow 0$  נקבל:

$$(2.35) \quad y_u(t) = \int_0^t u(t') \left[ \sum_{i=1}^n \lambda_i A_i e^{\lambda_i(t-t')} \right] dt'$$

הביטוי שבסוגריים המרובעים הוא הנגזרת של תגובת המדרגה, או במלים אחרות - תגובת המערכת לאימפולס (המופעל ב-  $t = t'$ ).

עד כאן הנחנו בפיתוח שלמשואה האופיינית יש  $n$  שרשים שונים. ניתן להראות שגם במקרה הכללי, כאשר יש שרשים עם כפילות, נקבל כאן את הנגזרת של תגובת המדרגה של המערכת, היא תגובת האימפולס.

$$(2.36) \quad y_u(t) = \int_0^t u(t') y_0(t-t') dt'$$

ע"י שינוי משתנה האינטגרציה, ניתן גם לקבל:

$$(2.37) \quad y_u(t) = \int_0^t u(t-t') y_0(t') dt'$$

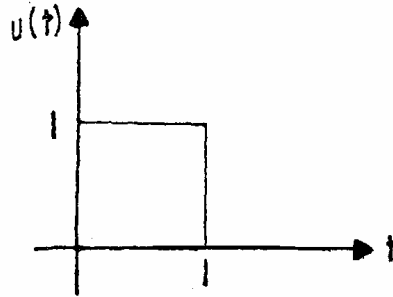
שתי הצורות של האינטגרל מכונות **אינטגרל הקונוולוציה** והן מאפשרות לחשב את התגובה לעירור שרירותי לפי תגובת האימפולס של המערכת.

אנו פותרים משוואות עבור  $t > 0$  ומניחים שהעירור מתחיל לפעול ב-  $t = 0$ . אם היה קיים עירור ב-  $t < 0$ , השפעתו על הפתרון הכללי תתבטא ב-  $y_i(t)$ , התגובה לתנאי ההתחלה של

המערכת. (יש לציין, שניתן תמיד להתייחס למצב התחלתי מסוים ב -  $t = 0$  כאל תוצאת פעולתו של עירור שפעל ב -  $-\infty < t < 0$ ).

**דוגמא 2.8:** מצא באמצעות אינטגרל הקונוולוציה את התגובה  $y_u(t)$  לעירור

$$y'' + 5y' + 6y = u(t) \quad u(t) = \delta_{-1}(t) - \delta_{-1}(t-1)$$



את תגובת האימפולס של המערכת מצאנו בדוגמא 2.7:

$$y_0(t) = [e^{-2t} - e^{-3t}] \delta_{-1}(t)$$

$$\begin{aligned} y_u(t) &= \int_0^t [e^{-2(t-t')} - e^{-3(t-t')}] \delta_{-1}(t-t') [\delta_{-1}(t') - \delta_{-1}(t'-1)] dt' = \\ &= \int_0^{\min(t,1)} [e^{-2t} e^{2t'} - e^{-3t} e^{3t'}] dt' = \frac{1}{2} e^{-2t} [e^{2\min(t,1)} - 1] - \frac{1}{3} e^{-3t} [e^{3\min(t,1)} - 1] \end{aligned}$$

אינטגרל הקונוולוציה מתאר את תגובת המערכת לעירור כפונקציה של העירור ושל תגובת המערכת להלם. בתגובה להלם באות לידי ביטוי כל תכונותיה של המערכת.

**דוגמא 2.9:** תגובה מאולצת לסינוסואידה. נדון במשוואה:

$$y^{(1)}(t) + \frac{1}{\tau} y^{(0)}(t) = \delta_{-1}(t) \sin(\omega t), \quad y(0) = 0$$

נשתמש בעובדה ש -  $y_\delta(t) = e^{-t/\tau}$  ונציב לאינטגרל הקונוולוציה:

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t e^{-\frac{(t-t')}{\tau}} \sin(\omega t') dt' = e^{-t/\tau} \left\{ -\frac{1}{\omega} \cos(\omega t') e^{t'/\tau} \Big|_0^t + \frac{1}{\tau \omega} \int_0^t e^{t'/\tau} \cos(\omega t') dt' \right\} = \\ &= e^{-t/\tau} \left\{ \left( -\frac{1}{\omega} \cos(\omega t) \cdot e^{t/\tau} + \frac{1}{\omega} \right) + \frac{1}{\tau \omega^2} \sin(\omega t') e^{t'/\tau} \Big|_0^t - \frac{1}{\tau^2 \omega^2} \int_0^t e^{t'/\tau} \sin(\omega t') dt' \right\} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{1}{\tau^2 \omega^2}} \left\{ -\frac{1}{\omega} \cos(\omega t) + \frac{1}{\tau \omega^2} \sin(\omega t) + \frac{1}{\omega} e^{-t/\tau} \right\} \end{aligned}$$

החלק העמיד של  $y_u(t)$  ניתן לכן ע"י:

$$y_{ss} = \frac{\tau}{1 + \tau^2 \omega^2} \{ \sin(\omega t) - \tau \omega \cos(\omega t) \} = \frac{\tau}{\sqrt{1 + \tau^2 \omega^2}} \cos(\omega t + \theta + \pi)$$

$$\text{כאשר: } \theta = \text{tg}^{-1} \frac{1}{\tau \omega}$$

## 2.4. מערכות מסדר שני

המשוואה מסדר שני:

$$(2.38) \quad y^{(2)} + a_1 y^{(1)} + a_0 y^{(0)} = u(t)$$

עם ערכי התחלה  $y(0)$ ,  $y^{(1)}(0)$  שימושית במיוחד.

משוואה כזאת מתארת מערכת של משרן, קבל ונגד; מערכת של קפיץ, מסה ומרסן; ומערכות נפוצות אחרות.

מקובל להגדיר  $a_1 = 2\zeta\omega_n$ ,  $a_0 = \omega_n^2$  ואז המשוואה נכתבת:

$$(2.39) \quad y^{(2)} + 2\zeta\omega_n y^{(1)} + \omega_n^2 y = u(t)$$

מספר גדלים ממלאים תפקיד מיוחד במערכות מסדר שני:

קרוי מקדם הריסון	$\zeta\omega_n$
קרוי קבוע הזמן	$\frac{1}{\zeta\omega_n}$
קרוי התדר הטבעי המרוסן	$\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$
קרוי התדר הטבעי הבלתי מרוסן	$\omega_n$
קרוי יחס הריסון	$\zeta$

כדי להראות את התפקיד שממלאים גדלים אלה, נמצא את התגובה לתנאי ההתחלה,  $y_i(t)$ , של המשוואה מסדר שני.

המשוואה ההומוגנית היא:

$$(2.40) \quad y^{(2)} + 2\zeta\omega_n y^{(1)} + \omega_n^2 y = 0$$

עם ערכי התחלה  $y(0)$ ,  $y^{(1)}(0)$ :

המשוואה האופיינית היא:

$$(2.41) \quad \lambda^2 + 2\zeta\omega_n \lambda + \omega_n^2 = 0$$



ושורשיה הם :

$$(2.42) \quad \lambda_{1,2} = \frac{-2\zeta\omega_n \pm \sqrt{4\zeta^2\omega_n^2 - 4\omega_n^2}}{2} = \\ = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$$

2.4.1. אם  $\omega_n^2 < 0$  או  $\omega_n$  דמיוני. במערכת פיסיקלית  $a_1 = 2\zeta\omega_n$  ממשי, ולפיכך  $\zeta$  דמיוני.

השורשים הם :

$$(2.43) \quad \lambda_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm |\omega_n|\sqrt{1 + |\zeta^2|}$$

מכיוון ש-  $|\zeta| \leq \sqrt{1 + |\zeta|^2}$  נקבל תמיד  $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$ .

הפתרון הכללי הוא :

$$(2.44) \quad y_i(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}$$

כאשר  $A_1, A_2$  יותאמו לערכי ההתחלה.

מערכת כזאת איננה יציבה - חלק מהתגובה לתנאי ההתחלה "מתפוצץ".

2.4.2. נניח  $\omega_n^2 > 0$ , בלי להגביל את כלליות הדיון, ניקח  $\omega_n > 0$ .

- |        |                |   |
|--------|----------------|---|
| (1) אם | $\xi > 1$      | נקבל 2 שורשים ממשיים ושליילים.                    |
| (2) אם | $\xi = 1$      | נקבל שורש כפול ממשי ושליילי.                      |
| (3) אם | $0 < \xi < 1$  | נקבל שני שורשים מרוכבים צמודים שחלקם הממשי שלילי. |
| (4) אם | $\xi = 0$      | נקבל שני שורשים דמיוניים צמודים.                  |
| (5) אם | $-1 < \xi < 0$ | נקבל שני שורשים מרוכבים צמודים שחלקם הממשי חיובי. |
| (6) אם | $\xi = -1$     | נקבל שורש כפול ממשי וחיובי.                       |
| (7) אם | $\xi < -1$     | נקבל שני שורשים ממשיים וחיוביים.                  |

בשלושת המקרים האחרונים מתקבלים פתרונות שאינם חסומים.

התגובה במקרה (1) קרויה "תגובה עם ריסון יתר".

התגובה במקרה (2) קרויה "תגובה עם ריסון קריטי".

התגובה במקרה (3) קרויה "תגובה עם תת ריסון".

נראה שבמקרה של תת ריסון (מקרה (3)) מתקבל פתרון ממשי :

$$(2.45) \quad y_i = A_1 e^{(-\zeta\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2})t} + A_2 e^{(-\zeta\omega_n - j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2})t}$$

במקרה זה ניתן להציג את  $y_i$  בצורה שקולה באופן הבא :

$$(2.46) \quad y_i = B_1 e^{-\zeta \omega_n t} \cos \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + B_2 e^{-\zeta \omega_n t} \sin \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t$$

וזאת בהסתמך על שוויון אוילר.

נציב את  $y_i$  בתנאי ההתחלה, ונקבל :

$$(2.47) \quad \begin{cases} y(0) = B_1 \\ y^{(1)}(0) = -\zeta \omega_n B_1 + \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} B_2 \end{cases}$$

בבעיה פיסיקלית שבה ערכי ההתחלה ממשיים, מקבלים כאן תמיד  $B_2, B_1$  ממשיים.

### 2.4.3. עקומת שורשים

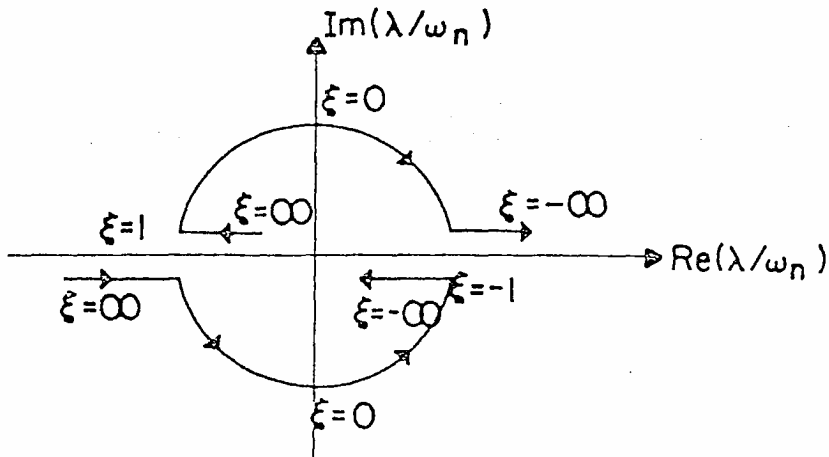
מאחר ו -

$$(2.43) \quad \lambda_{1,2} = -\zeta \omega_n \pm |\omega_n| \sqrt{1+\zeta^2}$$

נקבל עבור  $\omega_n^2 > 0$  כי :

$$(2.48) \quad \operatorname{Re}^2(\lambda) + \operatorname{Im}^2(\lambda) = \left\{ \operatorname{Re}[-\zeta \omega_n \pm j \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}] \right\}^2 + \left\{ \operatorname{Im}[-\zeta \omega_n \pm j \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}] \right\}^2 = \omega_n^2$$

ולכן נוכל לתאר את 7 האפשרויות השונות הנ"ל ע"י הצیור :



## 2.5. טרנספורם לפלס

2.5.1. שיטת טרנספורם לפלס לפתרון משוואות דיפרנציאליות כרוכה בהתמרת המשוואה הדיפרנציאלית ותנאי ההתחלה **ממישור הזמן** (בו המשתנה הבלתי תלוי הוא  $t$ ) **למישור התדר המרוכב** (בו המשתנה הבלתי תלוי הוא  $s$ ), פתרון הבעיה במישור התדר המרוכב, ואחר כך התמרתה חזרה למישור הזמן.

לטכניקה זו מספר יתרונות על פני הפתרון בתחום הזמן:

- (1) המשוואה הדיפרנציאלית ותנאי ההתחלה שבמישור הזמן הופכים למשוואה אלגברית במישור התדר המרוכב, ואנו מורגלים בפתרון משוואות אלגבריות יותר מפתרון משוואות דיפרנציאליות.
- (2) הפתרון המתקבל במישור התדר המרוכב כולל כחלקים בלתי נפרדים את התגובה לתנאי ההתחלה, התגובה החולפת לעירור והתגובה העמידה לעירור, והם אינם דורשים חישוב נפרד.

הקשיים העיקריים המתעוררים בשימוש בטכניקת טרנספורם לפלס הם קשיים בתהליך ההתמרה וההתמרה-ההפוכה בין מישור הזמן לבין מישור התדר המרוכב. ע"י שימוש בתכונות הטרנספורם וע"י ידיעת מספר טרנספורמים יסודיים, ניתן להתגבר בקלות יחסית על קשיים אלה, כפי שנוכח בהמשך.

2.5.2. כדי להגיע להגדרת טרנספורם לפלס נתבונן תחילה בהצגת פונקציה מחזורית ורציפה למקוטעין.

$$(2.49) \quad f(t) = f(t + nT)$$

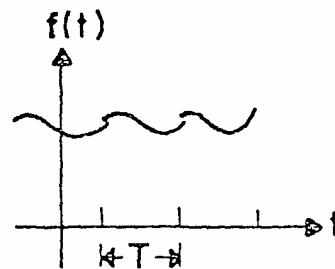
בעזרת טור פוריה:

$$(2.50) \quad f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ A_n \cos \frac{2\pi n}{T} t + B_n \sin \frac{2\pi n}{T} t \right]$$

כאשר:

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt$$

$$B_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin \frac{2\pi n}{T} t dt; \quad A_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos \frac{2\pi n}{T} t dt$$



נסמן  $\omega_n = \frac{2\pi n}{T}$  ונוכל לכתוב:

$$(2.51) \quad f(t) = A_0 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n [e^{j\omega_n t} + e^{-j\omega_n t}] - \frac{1}{2} j \sum_{n=1}^{\infty} B_n [e^{j\omega_n t} - e^{-j\omega_n t}]$$

או:

$$(2.52) \quad f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} (A_n - jB_n) e^{j\omega_n t} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} (A_n + jB_n) e^{-j\omega_n t}$$

נגדיר:

$$(2.53) \quad \begin{cases} C_0 \equiv A_0 \\ C_{\pm n} \equiv \frac{1}{2} (A_n + jB_n) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) (\cos(\omega_n t) \mp j \sin(\omega_n t)) dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{\mp j\omega_n t} dt \end{cases}$$

הצורה הסופית של הטור היא לפיכך:

$$(2.54) \quad f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{j\omega_n t}$$

כאשר לכל n:

$$(2.55) \quad C_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-j\omega_n t} dt$$

טור פוריה מאפשר הצגת פונקציות מחזוריות בלבד; אולם ניתן להתייחס לפונקציה שאינה מחזורית כאל פונקציה בעלת מחזור  $T \rightarrow \infty$ . נסמן את ההפרש בין  $-\omega_n$  ים עוקבים

$$d\omega = \frac{2\pi}{T} \text{ וברור שמתקיים } d\omega \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0$$

כעת,

$$(2.56) \quad f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} [C_n T] e^{j\omega_n t} \frac{d\omega}{2\pi} \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$F(\omega)$  הנה **התמרת פוריה** של  $f(t)$  הניתנת ע"י:

$$(2.57) \quad F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

לא ניתן לבצע התמרת פוריה של כל פונקציה  $f(t)$ , מכיוון שעבור פונקציות מסוימות האינטגרל עלול לא להתכנס. כדי להתגבר על בעיה זו נשנה את הטרנספורם.

נסמן :

$$(2.58) \quad \tilde{f}(t) = f(t)e^{-\sigma t}$$

$f(t) \equiv 0 \quad t < 0$  (  $\sigma$  ממשי) ונניח שעבור כל  $t < 0$ .

נבצע התמרת פוריה של  $\tilde{f}(t)$  :

$$(2.59) \quad \tilde{F}(\omega, \sigma) = \int_0^{\infty} \tilde{f}(t)e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(j\omega + \sigma)t} f(t) dt$$

עתה :

$$(2.60) \quad \tilde{f}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{j\omega t} \tilde{F}(\omega, \sigma)$$

נגדיר עתה "תדר מרוכב" :  $s \equiv \sigma + j\omega$

עתה נוכל להתאים לפונקציה  $f(t)$  את **טרנספורם לפלס**  $F(s)$  :

$$(2.61) \quad F(s) = L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

הטרנספורם ההפוך הוא :

$$(2.62) \quad f(t) = L^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} ds e^{st} F(s) , \quad ds = j d\omega$$

יש לשים לב ש-  $\sigma$  נבחרת כך שיתקיים האינטגרל :

$$(2.61) \quad F(s) = L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

לכל פונקציה  $f(t)$  קיימת  $\sigma$  מינימלית שמתחתיה האינטגרל לא יתקיים.  $F(s)$  הוא

לפיכך התמרת לפלס של  $f(t)$  רק עבור  $\sigma$  גדולות מהמינימלית, נסכם אם כך :

אם  $f(t)$  היא פונקציה של הזמן ומקיימת את שלושת הדרישות :

$$(1) \quad f(t) = 0 \text{ עבור } t < 0 ;$$

$$(2) \quad f(t) \text{ רציפה למקוטעין עבור } t \geq 0 ;$$

(3)  $f(t)$  מסדר אקספוננציאלי, היינו ניתן למצוא קבועים סופיים  $a, M, T$  כך שיתקיים :

$$(2.63) \quad e^{-at} |f(t)| < M$$

עבור כל  $t > T$ .

אזי, ניתן להגדיר את **טרנספורם לפלס** שלה :

$$(2.61) \quad F(s) = L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

כש- $s$  הוא מספר מרוכב, והחלק הממשי שלו חייב להיות כזה שיבטיח את התכנסות האינטגרל (כלומר  $\text{Re}(s) > a$ ).

(1) להלן נוכיח תכונות בסיסיות של טרנספורם לפלס :  
 הטרנספורם הוא ליניארי ומתקיים בו עקרון הסופרפוזיציה :  
 אם :  $L\{f_1(t)\} = F_1(s)$  ו-  $L\{f_2(t)\} = F_2(s)$  אזי :

$$(2.64) \quad L[a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)] = a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s)$$

(2) תכונות גזירה :

(א) גזירה ראשונה : נסמן :  $L\{f(t)\} = F(s)$  אזי :

$$(2.65) \quad L\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = \int_0^{\infty} \frac{df}{dt} e^{-st} dt = f(t)e^{-st} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} f(t)(-s)e^{-st} dt$$

$$= s \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt - f(0) = sF(s) - f(0)$$

(ב) גזירה  $k$  פעמים : נסמן  $L\{f(t)\} = F(s)$ . נוכיח בעזרת האינדוקציה המתמטית שמתקיים :

$$(2.66) \quad L\left\{\frac{d^k f(t)}{dt^k}\right\} = s^k F(s) - s^{k-1} f(0) - s^{k-2} f^{(1)}(0) - s f^{(k-2)}(0) - f^{(k-1)}(0)$$

או :

$$(2.67) \quad L\left\{\frac{d^k f(t)}{dt^k}\right\} = s^k F(s) - \sum_{i=0}^{k-1} s^{k-i-1} f^{(i)}(0)$$

את נכונות הטענה עבור  $k=1$ , כלומר גזירה ראשונה, הוכחנו זה עתה. נניח עתה שהטענה מתקיימת עבור  $k=n-1$ , כלומר נניח :

$$(2.68) \quad L\left\{\frac{d^{n-1} f(t)}{dt^{n-1}}\right\} = s^{n-1} F(s) - \sum_{i=0}^{n-2} s^{n-2-i} f^{(i)}(0)$$

נראה שמהנחה זו נובע שהטענה מתקיימת עבור  $k=n$ :

$$(2.69) \quad L\left\{\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right\} = L\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{d^{n-1}f(t)}{dt^{n-1}}\right)\right\} = sL\left\{\frac{d^{n-1}f(t)}{dt^{n-1}}\right\} - \frac{d^{n-1}f(t)}{dt^{n-1}}\Big|_{t=0}$$

$$= s\left[s^{n-1}F(s) - \sum_{i=0}^{n-2} s^{n-2-i} f^{(i)}(0)\right] - f^{(n-1)}(0) = s^n F(s) - \sum_{i=0}^{n-1} s^{n-1-i} f^{(i)}(0)$$

בכך הושלמה ההוכחה בשיטת האינדוקציה.

(3) תכונת אינטגרציה:

נסמן  $L\{f(t)\} = F(s)$ , אזי:

$$(2.70) \quad L\left\{\int_0^t f(t') dt'\right\} = \int_0^\infty \left[\int_0^t f(t') dt'\right] e^{-st} dt = \int_0^\infty \left[\int_0^t f(t') dt'\right] \frac{e^{-st}}{-s} \Big|_0^\infty - \int_0^\infty f(t) \cdot \left(-\frac{1}{s}\right) e^{-st} dt$$

האיבר הראשון שווה לאפס. לפיכך:

$$(2.71) \quad L\left\{\int_0^t f(t') dt'\right\} = \frac{1}{s} \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt = \frac{1}{s} F(s)$$

(4) משפט ההזזה בזמן:

נסמן  $L\{f(t)\} = F(s)$ , אזי:

$$(2.72) \quad L\{f(t-\tau)\} = \int_0^\infty f(t-\tau) e^{-st} dt = \int_\tau^\infty f(t-\tau) e^{-st} dt = \int_0^\infty f(t') e^{-st'} e^{-s\tau} dt' = e^{-s\tau} F(s)$$

יש לשים לב שהשתמשנו בהנחה שעבור כל  $t < 0$  מתקיים  $f(t) = 0$ , כמו כן החלפנו את משתנה האינטגרציה:  $t' = t - \tau$ .

(5) משפט ההזזה בתדר:

נסמן  $L\{f(t)\} = F(s)$ , אזי:

$$(2.73) \quad L\{e^{-at} f(t)\} = \int_0^\infty e^{-at} f(t) e^{-st} dt = \int_0^\infty f(t) e^{-(s+a)t} dt = F(s+a)$$

(6) משפט הערך ההתחלתי:

נסמן  $L\{f(t)\} = F(s)$ , ונוכיח שמתקיים:

$$(2.74) \quad f(0) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$$

$$(2.75) \quad L\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = sF(s) - f(0) = \int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt$$

$$(2.76) \quad \lim_{s \rightarrow \infty} [sF(s) - f(0)] = \lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} \left[ \lim_{s \rightarrow \infty} e^{-st} \right] dt = 0$$

$$(2.74) \quad f(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$$

המשפט תקף כאשר קיים הגבול  $\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$ .

(7) משפט הערך הסופי:

נסמן  $L\{f(t)\} = F(s)$ , ונוכיח שאם קיים הגבול  $f(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$  אזי:

$$(2.77) \quad f(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

$$(2.75) \quad L\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = sF(s) - f(0) = \int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} (sF(s) - f(0)) = \lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} \left[ \lim_{s \rightarrow 0} e^{-st} \right] dt = \int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} dt = f(\infty) - f(0)$$

$$(2.78) \quad \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) - f(0) = f(\infty) - f(0)$$

$$(2.77) \quad \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = f(\infty)$$

(8) "מתיחה" בזמן:

נסמן  $L\{f(t)\} = F(s)$ . אזי:

$$(2.79) \quad L\left\{f\left(\frac{t}{a}\right)\right\} = \int_0^{\infty} f\left(\frac{t}{a}\right) e^{-st} dt = a \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-(as)\tau} d\tau = aF(as), \quad (a > 0)$$

יש לשים לב להחלפת משתנה האינטגרציה:  $\tau = \frac{t}{a}$ .

(9) "מתיחה" בתדר:

נסמן  $L\{f(t)\} = F(s)$ . אזי:

$$(2.80) \quad L\{af(at)\} = \int_0^{\infty} af(at) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} f(at) e^{-st} d(at) = \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-\frac{s\tau}{a}} d\tau = F\left(\frac{s}{a}\right), \quad (a > 0)$$

(החלפת משתנה האינטגרציה:  $\tau = at$ ).



(10) משפט הגזירה בתדר :

נסמן  $L\{f(t)\} = F(s)$  אזי :

$$(2.81) \quad L\{tf(t)\} = \int_0^{\infty} -tf(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} f(t) \left[ \frac{d}{ds} e^{-st} \right] dt = \frac{d}{ds} \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt = \frac{d}{ds} F(s)$$

(11) משפט הקונבולוציה :

נסמן  $L\{g(t)\} = G(s), L\{f(t)\} = F(s)$

$$(2.82) \quad L\{f(t)*g(t)\} = L\left\{ \int_0^t f(t-\tau)g(\tau) d\tau \right\} = \int_0^{\infty} \left[ \int_0^t f(t-\tau)g(\tau) d\tau \right] e^{-st} dt$$

תוך ניצול ההנחה ש-  $f(t) = g(t) = 0$  עבור  $t < 0$  :

$$L\{f(t)*g(t)\} = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(t-\tau)g(\tau) d\tau e^{-st} dt = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} g(\tau)f(t-\tau) d\tau e^{-s\tau} e^{-s(t-\tau)} dt =$$

$$(2.83) \quad = \int_0^{\infty} f(t-\tau) e^{-s(t-\tau)} dt \int_0^{\infty} g(\tau) e^{-s\tau} d\tau = \int_0^{\infty} f(t') e^{-s(t')} dt' \int_0^{\infty} g(\tau) e^{-s\tau} d\tau = \\ = F(s)G(s)$$

יש לשים לב להחלפת משתנה האינטגרציה :  $t' = t - \tau$ .

2.5.3. נחשב עתה את התמרת לפלס לפונקציות נבחרות.

$$f(t) = \delta(t-t_0) \quad (1)$$

$$(2.84) \quad F(s) = L\{\delta(t-t_0)\} = \int_0^{\infty} \delta(t-t_0) e^{-st} dt = e^{-st_0}$$

במקרה המיוחד  $t_0 = 0$  ואז  $L\{\delta(t)\} = 1$

$$f(t) = \delta_{-1}(t) \quad (2)$$

$$(2.85) \quad F(s) = L\{\delta_{-1}(t)\} = \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-st} dt = \frac{e^{-st}}{-s} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s}, (\operatorname{Re}\{s\} > 0)$$

לאותה תוצאה היינו מגיעים גם תוך שימוש בתכונת האינטגרציה (2.71)

$$\delta_{-1}(t) = \int_{-\infty}^t \delta(t) dt \quad \text{כאשר}$$

$$f(t) = \delta_{-2}(t) \quad (3)$$

$$(2.86) \quad F(s) = L\{\delta_{-2}(t)\} = L\left\{ \int_0^t \delta_{-1}(t) dt \right\} = \frac{L\{\delta_{-1}(t)\}}{s} = \frac{1}{s^2}, \quad (\operatorname{Re}\{s\} > 0)$$

$$f(t) = e^{-at} \delta_{-1}(t) \quad (4)$$

$$(2.87) \quad F(s) = L\{e^{-at} \delta_{-1}(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{-at} \delta_{-1}(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-(a+s)t} dt = \frac{1}{s+a}$$

תוצאה זו יכולה להתקבל מידית ממשפט ההזזה בתדר (2.73).

תנאי ההתכנסות:  $\text{Re}\{s\} > -a$ .

$$f(t) = \cos(\omega t) \cdot \delta_{-1}(t) \quad (5)$$

$$(2.88) \quad F(s) = L\{\delta_{-1}(t) \cos(\omega \cdot t)\} = \int_0^{\infty} \cos(\omega \cdot t) e^{-st} dt = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}) e^{-st} dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-(s-j\omega)t} dt + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-(s+j\omega)t} dt = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{s-j\omega} + \frac{1}{s+j\omega} \right] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

התנאי להתכנסות האינטגרל הוא  $\text{Re}\{s\} > 0$ .

$$f(t) = \sin(\omega t) \cdot \delta_{-1}(t) \quad (6)$$

$$(2.89) \quad F(s) = L\{\delta_{-1}(t) \sin(\omega t)\} = \int_0^{\infty} \sin(\omega t) e^{-st} dt = \frac{1}{2j} \int_0^{\infty} (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) e^{-st} dt =$$

$$= \frac{1}{2j} \int_0^{\infty} e^{-(s-j\omega)t} dt - \frac{1}{2j} \int_0^{\infty} e^{-(s+j\omega)t} dt = \frac{1}{2j} \left[ \frac{1}{s-j\omega} - \frac{1}{s+j\omega} \right] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

התנאי להתכנסות האינטגרל הוא  $\text{Re}\{s\} > 0$ .

**הערה:** מכאן ואילך נניח שכל פונקציה, לה אנו מבצעים התמרת לפלס, שווה לאפס

עבור ערכי זמן שליליים, מבלי לרשום זאת במפורש. לדוגמא: כשנרשום  $L\{\sin \omega t\}$

נתכוון ל-  $L\{\delta_{-1}(t) \sin \omega t\}$ .

ע"י שימוש בתוצאות אלו ובתכונות הטרנספורם שהוזכרו קודם, ניתן לקבל את הטרנספורם והטרנספורם ההפוך של רוב הפונקציות השימושיות בפתרון בעיות, בלי להשתמש בנוסחאות הישירות.

**דוגמא 2.10:** מצא:

$$L\{e^{-a(t-\tau)} \sin \omega(t-\tau) \delta_{-1}(t-\tau)\}$$

ידוע:

$$L\{\sin(\omega \cdot t)\} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

אם  $L\{f(t)\} = F(s)$ , אז לפי תכונה (5):  $L\{e^{-at} f(t)\} = F(s+a)$  מקבלים:

$$L\{e^{-at} \sin(\omega \cdot t)\} = \frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$$

אבל, לפי תכונה (4):

$$L\{f(t-\tau)\} = e^{-s\tau} F(s)$$

מקבלים, סופית:

$$L\{e^{-a(t-\tau)} \sin \omega(t-\tau)\} = e^{-s\tau} \frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$$

**דוגמא 2.11:** מצא:

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+a)}\right\}$$

נשתמש בתכונה (11) (קונבולוציה).

ניקח:

$$F(s) = \frac{1}{s+a}, \quad G(s) = \frac{1}{s}$$

$$L^{-1}\{F(s) \cdot G(s)\} = f(t) * g(t) = \int_0^t f(t-t')g(t')dt'$$

ידוע:

$$f(t) = L^{-1}\{F(s)\} = e^{-at}, \quad g(t) = L^{-1}\{G(s)\} = \delta_{-1}(t)$$

$$\begin{aligned} L^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+a)}\right\} &= \int_0^t e^{-a(t-t')} \delta_{-1}(t') dt' = e^{-at} \int_0^t e^{at'} dt' = \frac{e^{-at}}{a} e^{at} \Big|_0^t \\ &= \frac{1}{a} [1 - e^{-at}] \end{aligned}$$

2.5.4. ניישם את הידע שרכשנו לפתרון המשוואה הדיפרנציאלית:

$$(2.4) \quad \sum_{k=0}^n a_k y^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^m b_k u^{(k)}(t)$$

עם תנאי ההתחלה:  $y(0), \dots, y^{(n-1)}(0)$ .

ניקח טרנספורם לפלס משני אגפי המשוואה. מכיוון שניתן לקבל את  $U(s) = L\{u(t)\}$ , נוכל

לחשב ישירות את  $Y(s)$ .  $y(t)$  הוא הטרנספורם ההפוך שלו:

$$y(t) = L^{-1}\{Y(s)\}$$

**דוגמא 2.12:** פתור את המשוואה:

$$y^{(1)}(t) + \frac{1}{\tau}y(t) = 0, \quad y(0) = y_0$$

נבצע התמרת לפלס של שני אגפי המשוואה:

$$sY(s) - y_0 + \frac{1}{\tau}Y(s) = 0 \Rightarrow Y(s) = \frac{y_0}{s + \frac{1}{\tau}}$$

$y(t)$  הוא ההתמרה ההפוכה של  $Y(s)$ :

$$y(t) = y_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \delta_{-1}(t)$$

**דוגמא 2.13:** פתור את המשוואה:

$$y^{(1)}(t) + \frac{1}{\tau}y(t) = f(t)$$

$$y(0) = 0$$

עם תנאי ההתחלה:

$$sY(s) + \frac{1}{\tau}Y(s) = F(s)$$

$$(s + \frac{1}{\tau})Y(s) = F(s)$$

$$Y(s) = \frac{F(s)}{s + 1/\tau}$$

נניח  $f(t) = y_0 \delta(t)$ : עירור אימפולס.

במקרה זה  $F(s) = y_0$  ונקבל:

$$Y(s) = \frac{y_0}{s + \frac{1}{\tau}}$$

$$y(t) = y_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \delta_{-1}(t)$$

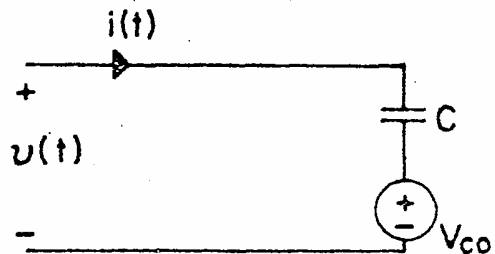
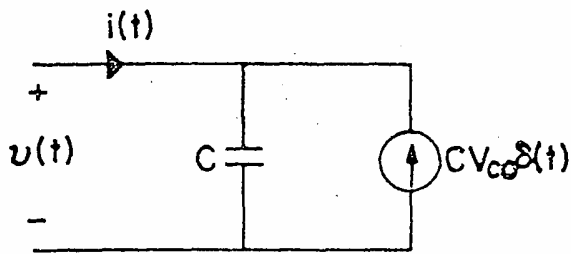
יש לשים לב לכך שה"אפקט" של עירור האימפולס הוא העברת המערכת מתנאי התחלה אפס לתנאי התחלה שאינם אפס. (כזכור, הגענו למסקנה זו גם כאשר פתרנו את הבעיה במישור הזמן).

**דוגמא 2.14:** נתבונן בקבל שהמתח ההתחלתי בין הדקיו הוא  $V_{co}$ . נרשום את משוואת הקבל בשני אופנים, ונרשום את המשוואות כשהן מותמרות התמרת לפלס:

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt} \rightarrow I(s) = CsV(s) - CV_{co}$$

$$v(t) = V_{co} + \frac{1}{C} \int_0^t i(t') dt' \rightarrow V(s) = \frac{1}{sC} I(s) + \frac{V_{co}}{s}$$

את הקבל עם תנאי ההתחלה  $V_{co}$  נוכל לייצג ע"י קבל שמתחו ההתחלתי אפס בטור למקור מתח, או ע"י קבל שמתחו ההתחלתי אפס במקביל למקור זרם.

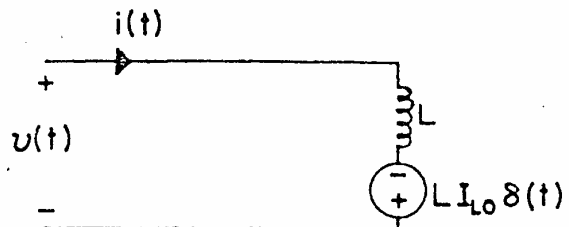
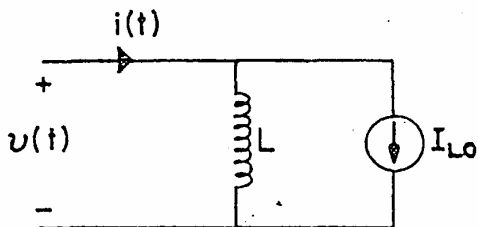


**דוגמא 2.15:** נתבונן במשרן שהזרם ההתחלתי דרכו הוא  $I_{L0}$ . בצורה דומה לדוגמא הקודמת נקבל:

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt} \rightarrow V(s) = LsI(s) - LI_{L0}$$

$$i(t) = I_{L0} + \frac{1}{L} \int_0^t v(t') dt' \rightarrow I(s) = \frac{1}{Ls} V(s) + \frac{I_{L0}}{s}$$

המעגלים האקוויולנטיים המתאימים (עם סלילים שזרמם ההתחלתי הוא אפס) הם:



**דוגמא 2.16:** מצא  $y(t)$  עבור המשוואה:

$$y'' + 5y' + 6y = u'$$

$u(t) = e^{-2t} \delta_{-1}(t)$  וידועים תנאי ההתחלה (בטרם הופעל העירור):

$$y'(0) = 0; y(0) = 1$$

$$L\{y''+5y'+6y\} = L\{y''\} + 5L\{y'\} + 6L\{y\} = [s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)] + 5[sY(s) - y(0)] + 6Y(s) = Y(s)[s^2 + 5s + 6] - s - 5$$

$$L\{u'\} = sU(s) - u(0) = \frac{s}{s+2}$$

המשוואה האלגברית ל-  $Y(s)$  היא:

$$Y(s)[s^2 + 5s + 6] - s - 5 = \frac{s}{s+2}$$

$$Y(s)[s^2 + 5s + 6] = \frac{s}{s+2} + s + 5 = \frac{s + (s+2)(s+5)}{s+2}$$

$$Y(s) = \frac{s + (s+2)(s+5)}{(s+2)(s^2 + 5s + 6)} = \frac{s^2 + 8s + 10}{s^3 + 7s^2 + 16s + 12}$$

כדי למצוא את  $y(t)$  נפרק את  $Y(s)$  לשברים חלקיים:

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{s^2 + 8s + 10}{(s+2)^2(s+3)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{(s+2)^2} + \frac{C}{s+3} \\ &= \frac{A(s+2)(s+3) + B(s+3) + C(s+2)^2}{(s+2)^2(s+3)} = \frac{A[s^2 + 5s + 6] + B[s+3] + C[s^2 + 4s + 4]}{(s+2)^2(s+3)} \\ &= \frac{s^2[A+C] + s[5A+B+4C] + 6A+3B+4C}{(s+2)^2(s+3)} \end{aligned}$$

מכאן:

$$\begin{cases} A + C = 1 \\ 5A + B + 4C = 8 \\ 6A + 3B + 4C = 10 \end{cases}$$

ומפתרון המערכת מקבלים:  $C = -5, B = -2, A = 6$

מכאן:

$$Y(s) = \frac{6}{s+2} + \frac{-2}{(s+2)^2} + \frac{-5}{s+3}$$

את  $y(t)$  ניתן למצוא כעת ישירות מטבלת הטרנספורמים היסודיים ומתכונות הטרנספורם.

$$y(t) = 6e^{-2t} - 2te^{-2t} - 5e^{-3t}, \quad (t > 0)$$

תהליך הפירוק לשברים חלקיים של  $Y(s)$  הוא בדרך כלל חלק בלתי נפרד מפתרון משוואות באמצעות התמרות לפלס. נזכיר לכן את התהליך הכללי של פירוק פונקציה רציונלית לשברים חלקיים.

(1) נניח של- $P(s)$ , פולינום ב- $s$ , אין שרשים מרובים. אזי:

$$(2.90) \quad \frac{1}{P(s)} = \frac{1}{(s - \lambda_1) \cdots (s - \lambda_n)} = \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{s - \lambda_k}$$

כאשר:

$$(2.91) \quad A_k = \frac{1}{P(s)} (s - \lambda_k) \Big|_{s=\lambda_k}$$

(2) נניח של- $P(s)$  אין שורשים כפולים, ונניח ש- $H(s)$  הוא פולינום ממעלה נמוכה ממעלת  $P(s)$ .

$$(2.92) \quad \frac{H(s)}{P(s)} = \frac{H(s)}{(s - \lambda_1) \cdots (s - \lambda_n)} = \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{s - \lambda_k}$$

כאשר:

$$(2.93) \quad A_k = \frac{H(s)(s - \lambda_k)}{P(s)} \Big|_{s=\lambda_k}$$

(3) נניח שמעלת  $H(s)$  נמוכה ממעלת  $P(s)$ , ונניח של- $P(s)$   $r$  שרשים שונים:

$\lambda_1$  בכפילות  $n_1$ ,  $\lambda_2$  בכפילות  $n_2$ ,  $\lambda_i$  בכפילות  $n_i$ .

$$(2.94) \quad \frac{H(s)}{P(s)} = \frac{H(s)}{(s - \lambda_1)^{n_1} (s - \lambda_2)^{n_2} \cdots (s - \lambda_r)^{n_r}} = \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^{n_i} \frac{C_{ik}}{(s - \lambda_i)^k}$$

כאשר:

$$(2.95) \quad C_{ik} = \frac{1}{(n_i - k)!} \frac{d^{n_i - k}}{ds^{n_i - k}} \left[ (s - \lambda_i)^{n_i} \frac{H(s)}{P(s)} \right] \Big|_{s = \lambda_i}$$

(4) נניח שמעלת  $H(s)$  גבוהה או שווה למעלת  $P(s)$ . במקרה זה מחלקים את  $H(s)$

ב-  $P(s)$  ומקבלים פולינום חדש,  $R(s)$ , בתוספת מנת פולינומים  $\frac{H_1(s)}{P(s)}$  כאשר מעלת

$H_1(s)$  נמוכה ממעלת  $P(s)$ . את  $\frac{H_1(s)}{P(s)}$  אנו יודעים לפרק לשברים חלקיים).

$$(2.96) \quad \frac{H(s)}{P(s)} = R(s) + \frac{H_1(s)}{P(s)}$$

**דוגמא 2.17:** פרק לשברים חלקיים את:

$$\frac{3s(s+1)(s+2)}{(s+3)(s+4)}$$

מעלת המונה גבוהה ממעלת המכנה, לפיכך נחלק את הפולינומים זה בזה ונקבל:

$$\frac{3s(s+1)(s+2)}{(s+3)(s+4)} = 3s - 12 + \frac{54s + 144}{(s+3)(s+4)}$$

עתה,

$$\frac{54s + 144}{(s+3)(s+4)} = \frac{A_1}{s+3} + \frac{A_2}{s+4}$$

כאשר:

$$A_1 = \left. \frac{(54s + 144)(s+3)}{(s+3)(s+4)} \right|_{s=-3} = -18$$

$$A_2 = \left. \frac{(54s + 144)(s+4)}{(s+3)(s+4)} \right|_{s=-4} = 72$$

בסה"כ:

$$\frac{3s(s+1)(s+2)}{(s+3)(s+4)} = 3s - 12 - \frac{18}{s+3} + \frac{72}{s+4}$$



**דוגמא 2.18:** פרק לשברים חלקיים את:  $\frac{1}{(s+1)(s+2)^2}$

$$\frac{1}{(s+1)(s+2)^2} = \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^{n_i} \frac{C_{ik}}{(s-l_i)^k} = \frac{C_{11}}{s+1} + \frac{C_{21}}{s+2} + \frac{C_{22}}{(s+2)^2}$$

$$C_{11} = \frac{1}{(1-1)!} \frac{d^0}{ds^0} \left[ (s+1) \frac{1}{(s+2)^2(s+1)} \right] \Bigg|_{s=-1} = \frac{1}{(s+2)^2} \Bigg|_{s=-1} = 1$$

$$C_{21} = \frac{1}{(2-1)!} \frac{d^1}{ds^1} \left[ (s+2)^2 \frac{1}{(s+2)^2(s+1)} \right] \Bigg|_{s=-2} = \frac{d}{ds} (s+1)^{-1} \Bigg|_{s=-2} = \frac{-1}{(s+1)^2} \Bigg|_{s=-2} = -1$$

$$C_{22} = \frac{1}{(2-2)!} \frac{d^0}{ds^0} \left[ (s+2)^2 \frac{1}{(s+2)^2(s+1)} \right] \Bigg|_{s=-2} = \frac{1}{s+1} \Bigg|_{s=-2} = -1$$

בסה"כ:

$$\frac{1}{(s+1)(s+2)^2} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} - \frac{1}{(s+2)^2}$$

2.5.5. נתבונן במשוואה מהצורה:

$$\sum_{k=0}^n a_k y^{(k)}(t) = u(t)$$

ונניח שערכי ההתחלה הם כולם אפס:

$$y^{(n-1)}(0) = \dots = y(0) = 0$$

ניקח טרנספורם לפלס משני האגפים ונקבל:

$$(2.97) \quad Y(s) \sum_{k=0}^n a_k s^k = U(s)$$

או:

$$(2.98) \quad \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{\sum_{k=0}^n a_k s^k}$$

$G(s)$ , היחס בין טרנספורם לפלס - של התגובה לבין טרנספורם לפלס של העירור, כאשר ערכי ההתחלה של  $y$  ונגזרותיו כולם אפס, קרוי **פונקציית התמסורת**. היחס הזה אינו תלוי, כפי שאנו רואים, בעירור עצמו. לאמתו של דבר, הפולינום ב- $s$ ,  $\sum a_k s^k$ , הוא **הפולינום האופייני** הקשור למשוואה הדיפרנציאלית.

כאשר ידועה פונקציית התמסורת, ניתן למצוא מיידית את הטרנספורם של התגובה, מתוך הטרנספורם של העירור, אם ידוע שערכי ההתחלה כולם אפס.

נניח שלמערכת מסוימת יש פונקציית תמסורת  $G(s)$ , ונניח שהעירור הוא אימפולס, ושכל ערכי ההתחלה של  $y$  ונגזרותיו הם אפס, אזי:

$$(2.99) \quad Y(s) = G(s)U(s) = G(s) \cdot L\{\delta_0(t)\} = G(s) \cdot 1 = G(s)$$

קבלנו את התוצאה שפונקציית התמסורת היא טרנספורם לפלס של התגובה לאימפולס של מערכת, כאשר ערכי ההתחלה הם כולם אפס.

2.5.6. נתבונן במשוואה הכללית:

$$(2.4) \quad \sum_{k=0}^n a_k y^{(k)} = \sum_{k=0}^m b_k u^{(k)}$$

עם ערכי ההתחלה:

$$y^{(n-1)}(0), \dots, y(0)$$

לפונקציית העירור יש ערכי התחלה:

$$u^{(m-1)}(0), \dots, u(0)$$

ע"י לקיחת טרנספורם לפלס משני האגפים נקבל משוואה אלגברית מהצורה:

$$(2.100) \quad Y(s)P_1(s) + Q_1(s) = U(s)P_2(s) + Q_2(s)$$

$P_1(s)$  הוא הפולינום האופייני של המשוואה. הפולינומים  $Q_1(s)$  ו-  $Q_2(s)$  מקורם

בביטויים הכוללים את ערכי ההתחלה של התגובה והעירור בהתאמה. ניתן לרשום את המשוואה האלגברית באופן הבא:

$$(2.101) \quad P_1(s)Y(s) = U(s)P_2(s) + Q_2(s) - Q_1(s)$$

$$(2.102) \quad Y(s) = U(s) \underbrace{\frac{P_2(s)}{P_1(s)}} + \underbrace{\frac{Q_2(s) - Q_1(s)}{P_1(s)}}$$



**פונקציית התמסורת** היא, באופן כללי, היחס בין טרנספורם לפלס של התגובה לבין טרנספורם לפלס של העירור, כאשר מתעלמים מביטויים שמקורם בערכי ההתחלה של התגובה ושל העירור. כאן פונקציית התמסורת היא:

$$(2.103) \quad G(s) = \frac{P_2(s)}{P_1(s)}$$

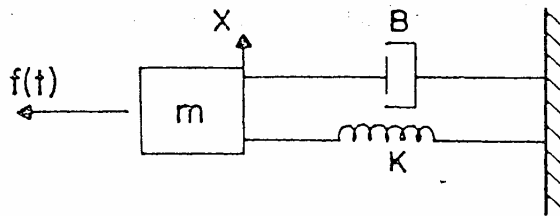
השורשים של  $P_2(s)$  קרויים **האפסים** של פונקציית התמסורת והשורשים של  $P_1(s)$  קרויים **הקטבים** של פונקציית התמסורת.  
 מקור המונחים האחרונים הוא בתיאור הגרפי של הפונקציה:  $G(s) = G(\sigma + j\omega)$  מעל המישור המרוכב.

קל לראות שמערכת שתגובתה "מתפוצצת", פונקציית התמסורת שלה כוללת לפחות קוטב אחד שנמצא בחלק הימני של המישור המרוכב (היינו  $\sigma > 0$ ). פונקציית התמסורת של מערכת שתגובתיה לא "מתפוצצות" כוללת קטבים בחלק השמאלי של מישור  $s$  ( $\sigma < 0$ ) בלבד.

**דוגמה 2.19:** נתבונן במערכת:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + B \frac{dx}{dt} + Kx = f(t)$$

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = V_0$$



ניקח טרנספורם של כל אגף:

$$m[s^2X(s) - sx_0 - V_0] + B[sX(s) - x_0] + KX(s) = F(s)$$

$$\Rightarrow X(s) = \frac{F(s)}{P(s)} + \frac{F_1(s)}{P(s)}$$

כאשר  $P(s) = ms^2 + Bs + K$  - הפולינום האופייני של המערכת הוא:  $F_1(t)$  הוא הכוח שהיה דרוש על מנת להביא את המערכת מתנאי התחלה אפס לתנאים הנתונים.  
 ברור ש:

$$F_1(t) = mx_0\delta_1(t) + (mV_0 + Bx_0)\delta_0(t)$$

ולכן:

$$F_1(s) = mx_0s + (mV_0 + Bx_0)$$

**דוגמא 2.20:** מצא את פונקציית התמסורת המתאימה למשוואה:

$$y'' + y' + y = u' + u$$

כאשר ערכי ההתחלה הם:

$$y^{(1)}(0) = 1, y(0) = 2, u(0) = 0$$

ניקח טרנספורם משני האגפים:

$$s^2 Y(s) - sy(0) - y^{(1)}(0) + sY(s) - y(0) + Y(s) = sU(s) - u(0) + U(s)$$

$$Y(s)[s^2 + s + 1] - 2s - 1 - 2 = U(s)[s + 1]$$

$$Y(s)[s^2 + s + 1] = U(s)[s + 1] + 2s + 3$$

$$Y(s) = U(s) \frac{s+1}{s^2+s+1} + \frac{2s+3}{s^2+s+1}$$

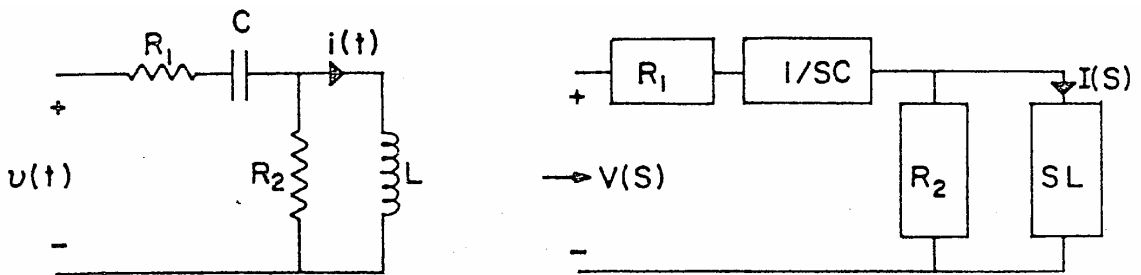
$$G(s) = \frac{s+1}{s^2+s+1}$$

אנו רואים שניתן לקבל ישירות את פונקציית התמסורת ע"י לקיחת טרנספורם לפלס משני אגפי המשוואה, תוך התעלמות מערכי ההתחלה של העירור ושל התגובה.

2.5.7. כדי לקבל את פונקציית התמסורת של מערכת אין צורך למצוא תחילה את המשוואה

הדיפרנציאלית שלה. ניתן לקבל ישירות את פונקציית התמסורת של מערכת מתוך הדיאגרמה האנלוגית שלה, וזאת ע"י מציאת היחס בין התגובה והעירור, כאשר העירור הוא אות אקספוננציאלי  $Ae^{st}$ . התהליך שיש לבצע למעשה הוא החלפת כל רכיב בדיאגרמה האנלוגית באימפדנס המתאים לו (שיהיה כאן פונקציה של  $s$ ), וטיפול ברשת האימפדנסים המתקבלת כשם שמטפלים ברשת נגדים לצורך מציאת היחס בין התגובה לעירור.

**דוגמא 2.21:** מצא  $G(s) = \frac{I(s)}{V(s)}$  עבור המערכת הבאה:



$$G(s) = \frac{I(s)}{V(s)} = \frac{R_2 \parallel sL}{R_1 + \frac{1}{sC} + R_2 \parallel sL} \cdot \frac{1}{sL} = \frac{\frac{R_2 sL}{R_2 + sL}}{R_1 + \frac{1}{sC} + \frac{R_2 sL}{R_2 + sL}} \cdot \frac{1}{sL}$$

$$= \frac{R_2 sC}{s^2 [R_2 + R_1]LC + s[R_1 R_2 C + L] + R_2}$$

מכאן גם ניתן לקבל את המשוואה הדיפרנציאלית (ע"י חזרה למישור הזמן כאשר)  $s \rightarrow \frac{d}{dt}$

$$R_2 s C V(s) = [s^2 (R_2 + R_1)LC + s(R_1 R_2 C + L) + R_2] I(s)$$

$$R_2 C v'(t) = (R_2 + R_1)LC i''(t) + (R_1 R_2 C + L)i'(t) + R_2 i(t)$$

### הערה:

בפתרון משוואות בהתמרת לפלס, מתעורר ספק היכן נקבעים ערכי ההתחלה.

לדוגמא, כשהעירור אימפולס ערך התגובה ממש לפני הפעלת העירור, ב-  $t = 0^-$ , שונה מערכה מיד לאחר הפעלתו, ב-  $t = 0^+$  (דוגמא 2.13): גם לא ברור אם ערכי ההתחלה של העירור נקבעים ב-  $t = 0^-$  (ואז הם זהותית אפס) או ב-  $t = 0^+$ .

**הפתרון:** נבחר את ההתחלה כרצוננו סביב  $t = 0$ , אך נקפיד שכל ערכי ההתחלה בבעיה ייקבעו באותה נקודה בדיוק, ושאותה נקודה תהיה הגבול התחתון של האינטגרל בנוסחה (2.61). בדרך כלל תנאי התחלה נתונים ב-  $t = 0^-$ , ואז ערכי ההתחלה של העירור שווים לאפס.

שים לב לכך שמשפט הערך ההתחלתי מספק את הערך בנקודה  $t = 0^+$ .



### 3. ייצוג מערכות רציפות במרחב המצבים

#### 3.1. מבוא

3.1.1. התהליכים המתבצעים במערכות פיסיקליות שונות הנם, בסופו של דבר, מעברי אנרגיה ברכיבי המערכות. דוגמה אופיינית לכך היא מעגל תהודה חשמלי בו מתרחשים חילופי אנרגיה בין הקבל לבין המשרן.

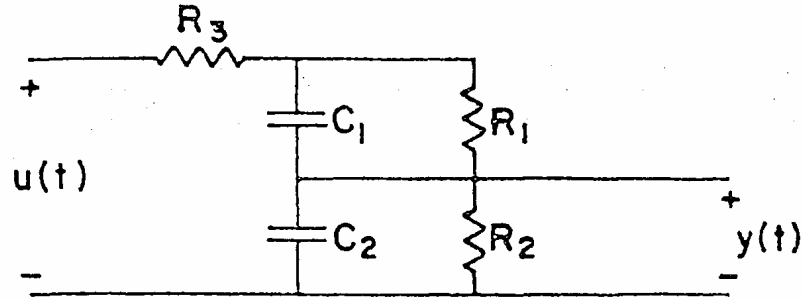
מידיעת כמות האנרגיה האגורה בכל אחד מהרכיבים אוגרי האנרגיה שבמערכת פיסיקלית ברגע מסוים ניתן לקבל כל מידע דרוש על מצב המערכת באותו רגע. במערכת חשמלית, הכוללת נגדים, משרנים וקבלים, ניתן לקבל את כל הזרמים וכל המתחים במערכת מידיעת זרמי כל המשרנים ומתחי כל הקבלים (האנרגיה האגורה במשרן היא  $\frac{1}{2}Li^2$  ובקבל  $\frac{1}{2}Cv^2$ ). קבוצת משתנים אשר המשתנים הכלולים בה הם מתחי הקבלים וזרמי המשרנים במערכת חשמלית מסוימת, מאפיינת ומגדירה את מצב המערכת כפי שהוא משתנה בזמן. קבוצת משתנים כזו נקראת **קבוצת משתני מצב** של המערכת.

נניח שקבוצת משתני המצב כוללת  $n$  משתנים. מתוך חוקי הרשתות החשמליות (חוקי קירכהוף וכיו"ב) ניתן לרשום מערכת של  $n$  משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון עבור  $n$  המשתנים. מתוך ידיעת העירור למערכת (ותנאי ההתחלה) נוכל לקבל כל גודל הקשור למערכת. המבנה המתמטי הזה נקרא **הצגת מערכת ע"י משתני מצב**.

מתחי הקבלים וזרמי המשרנים במערכת חשמלית הם משתני מצב בעלי משמעות פיסיקלית ברורה. אולם, הצגת מערכת ע"י משתני מצב איננה יחידה, ולמעשה קיים מספר אינסופי של דרכים להצגת מערכת באמצעות משתני מצב. באופן כללי אין הכרח שלמשתנה מצב תהיה משמעות פיסיקלית מיידית. לפיכך, ההגדרה הפורמלית והמלאה של "מצב של מערכת" היא כדלקמן: "מצב של מערכת הוא קבוצת משתנים אשר מכילה מידע מספיק על עברה של המערכת כדי לאפשר חישוב התנהגותה בעתיד, בהנחה שידועים העירורים למערכת וידועות המשואות המתארות את התנהגות המערכת ומקשרות בין המשתנים".

**דוגמא 3.1:** מצא הצגת משתני מצב עבור המערכת החשמלית הנתונה. העירור הוא מתח

הכניסה  $u(t)$  והתגובה המעניינת אותנו היא מתח המוצא  $y(t)$ .



ניקח כמשתני מצב את מתחי הקבלים  $V_{c1}, V_{c2}$ . משוואות המעגל הן:

$$\begin{cases} \frac{V_{c1}}{R_1} + C_1 \frac{dV_{c1}}{dt} = C_2 \frac{dV_{c2}}{dt} + \frac{V_{c2}}{R_2} \\ R_3 \left[ \frac{V_{c1}}{R_1} + C_1 \frac{dV_{c1}}{dt} \right] + V_{c1} + V_{c2} = u(t) \end{cases}$$

כמו כן קיימים שני תנאי ההתחלה  $V_{c1}(0), V_{c2}(0)$ . נפתור את שתי המשוואות עבור  $\frac{dV_{c2}}{dt}, \frac{dV_{c1}}{dt}$  ונקבל:

$$\begin{cases} \frac{dV_{c1}}{dt} = -V_{c1} \frac{\left(\frac{R_3}{R_1}\right) + 1}{R_3 C_1} - \frac{V_{c2}}{R_3 C_1} + \frac{u(t)}{R_3 C_1} \\ \frac{dV_{c2}}{dt} = -\frac{V_{c1}}{R_3 C_2} - V_{c2} \frac{\left(\frac{R_3}{R_2}\right) + 1}{R_3 C_2} + \frac{u(t)}{R_3 C_2} \end{cases}$$

ניתן לכתוב את המערכת בכתוב מטריציאלי באופן הבא:

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_{c1} \\ \dot{V}_{c2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_3 + R_1}{R_1 R_3 C_1} - \frac{1}{R_3 C_1} \\ -\frac{1}{R_3 C_2} - \frac{R_3 + R_2}{R_2 R_3 C_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{c1} \\ V_{c2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_3 C_1} \\ \frac{1}{R_3 C_2} \end{bmatrix} u(t)$$

כאשר קיים וקטור תנאי ההתחלה:

$$\begin{bmatrix} V_{c1}(0) \\ V_{c2}(0) \end{bmatrix}$$



$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{c1} \\ V_{c2} \end{bmatrix} \quad \text{התגובה } y \text{ תתקבל ע"י:}$$

הצגה זו של משתני מצב איננה, כאמור, יחידה. כדי להבדילה מהצגות משתני מצב אחרות הקיימות עבור אותה מערכת היא קרויה הצגת משתני המצב הפיסיקלית של המערכת.

3.1.2. המבנה הכללי של הצגת מערכת באמצעות משתני מצב ניתן להיכתב בכתוב וקטורי ומטריציאלי באופן הבא:  
המשוואה היא:

$$(3.1) \quad \dot{\underline{x}} = A\underline{x} + Bu$$

$A$  היא מטריצה ריבועית וקרויה **המטריצה הדינמית** של ההצגה.

$x$  הוא וקטור משתני המצב והוא קרוי **וקטור המצב**

$u$  הוא סקלר, העירור. [נטפל רק במערכות עם עירור יחיד].

$B$  הוא וקטור עמודה.

קיים וקטור תנאי התחלה, שהוא וקטור עמודה:

$$(3.2) \quad \underline{x}(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{bmatrix}$$

התגובה תתקבל ע"י:

$$(3.3) \quad y = C\underline{x} + du$$

כאן  $C$  הוא וקטור שורה, ו- $d$  הוא סקלר.

בכל הצגות משתני המצב הקיימות עבור מערכת מסוימת קיים אותו מספר מינימלי של משתני מצב [עובדה זו נובעת ישירות מהגדרת המצב שהובאה בסעיף הראשון, והמחייבת מספר מינימלי של משתני מצב בהצגה]. נוכח בהמשך שהמערכת שמוצגת ע"י  $n$  משתני מצב ניתנת לייצוג ע"י משוואה דיפרנציאלית מסדר  $n$  ולהפך.

כדי לקבל הצגת משתני מצב חדשה מתוך הצגה נתונה נשתמש בטרנספורמציה דמיון.

תהי  $T$  מטריצה ריבועית, באופן שקיימת גם  $T^{-1}$

יהי  $z$  וקטור המצב החדש:

$$(3.4) \quad \underline{x} = Tz, \quad \underline{z} = T^{-1}\underline{x}$$

המשוואה מקבלת את הצורה:

$$\dot{\underline{z}} = T^{-1}\dot{\underline{x}} = T^{-1}[A\underline{x} + Bu] = T^{-1}AT\underline{z} + T^{-1}Bu$$

ובסה"כ:

$$(3.5) \quad \dot{\underline{z}} = T^{-1}AT\underline{z} + T^{-1}\underline{B}u$$

כמו כן :

$$(3.6) \quad \underline{z}(0) = T^{-1}\underline{x}(0)$$

-1

$$(3.7) \quad y = Cx + du = CT\underline{z} + du$$

נסמן בכוכב את המטריצות והוקטורים של ההצגה החדשה :

$$(3.8) \quad A^* = T^{-1}AT; \underline{B}^* = T^{-1}\underline{B}; C^* = CT; d^* = d$$

וסך הכל נקבל :

$$(3.9) \quad \begin{aligned} \dot{\underline{z}} &= A^* \underline{z} + \underline{B}^* u \\ y &= C^* \underline{z} + d^* u \end{aligned}$$

3.1.3. קיימת הצגת משתני מצב מיוחדת הקרויה הצגה ע"י משתני פאזה הקשורה ישירות למושואה הדיפרנציאלית המתארת את המערכת. בהצגה זו  $n$  משתני המצב הם התגובה  $y$  ו- $n-1$  נגזרותיה הראשונות.

נתבונן במושואה :

$$(3.10) \quad y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0y = u(t)$$

עם  $n$  תנאי ההתחלה :

$$y^{(n-1)}(0), y^{(n-2)}(0), \dots, y(0)$$

נגדיר :

$$x_1 = y(t)$$

$$x_2 = \frac{dx_1}{dt} = y^{(1)}(t)$$

⋮

$$x_{n-1} = \frac{dx_{n-2}}{dt} = y^{(n-2)}(t)$$

$$x_n = \frac{dx_{n-1}}{dt} = y^{(n-1)}(t)$$

וקטור המצב הוא :

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

את המשוואה הדיפרנציאלית המקורית נוכל להחליף כעת במערכת של  $n$  משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון באופן הבא:

$$(3.11) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n \\ \dot{x}_n = -a_0 x_1 - a_1 x_2 - \dots - a_{n-1} x_n + u(t) \end{cases}$$

$n-1$  המשוואות הראשונות מתקבלות מידית מתוך הגדרת המשתנים  $\dot{x}_i$ . המשוואה האחרונה היא כתיבה מחדש של המשוואה הדיפרנציאלית המקורית.

ניתן לרשום את מערכת המשוואות (3.11) בכתוב מטריוציאלי:

$$(3.12) \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

כאשר קיים וקטור תנאי ההתחלה:

$$(3.13) \quad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(0) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(0) \end{bmatrix}$$

והתגובה  $y$  תתקבל מתוך המשוואה:

$$(3.14) \quad y = [1 \ 0 \ \dots \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

זוהי הצגת משתני המצב המבוקשת.

3.1.4. נציג באמצעות משתני מצב מערכת המתוארת ע"י המשוואה הדיפרנציאלית הכללית יותר:

$$(3.15) \quad \sum_{k=0}^n a_k y^{(k)} = \sum_{k=0}^m b_k y^{(k)}$$

(נניח  $n > m$ ), עם תנאי התחלה:  $y^{(n-1)}(0), \dots, y(0)$

לא נוכל להשתמש במישרין בשיטה שתוארה בסעיף הקודם מכיוון שהיא אינה מאפשרת לבטא נגזרות של  $u(t)$ .

כדי לקבל הצגת משתני מצב למערכת זו נשתמש בתכונות התגובה לעירור שהוזכרו בסעיף 2.3.3. שבפרק 2. נציג באמצעות משתני מצב, בשיטה שתוארה למעלה, את המערכת

$$(3.16) \quad \sum_{k=0}^n a_k y^{*(k)} = u(t)$$

כאשר משתני המצב הם  $x_1 = y^*$ ,  $x_2 = y^*(1)$ , ...,  $x_n = y^*(n-1)$ .

את  $y$  נקבל מתוך  $y^*$  באמצעות הוקטור  $C$ . כדי להשלים את ההצגה נצטרך לקבל את וקטור תנאי ההתחלה  $x^*(0)$  הכולל את הרכיבים  $y^*(0)$ , ...,  $y^*(n-1)(0)$ , מתוך הערכים הנתונים  $y(0)$ , ...,  $y^{(n-1)}(0)$ .

**דוגמא 3.2:** מצא הצגת משתני מצב עבור מערכת המתוארת ע"י המשוואה:

$$y^{(2)} + 2y^{(1)} - 3y^{(0)} = u^{(1)} + 2u^{(0)}$$

כאשר נתונים ערכי ההתחלה:

$$y^{(1)}(0) = 1, \quad y(0) = 0$$

נציג את:

$$y^{*(2)} + 2y^{*(1)} - 3y^* = u$$

קיים:

$$y = y^{*(1)} + 2y^*$$

ההצגה היא:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

נותר לנו למצוא את וקטור תנאי ההתחלה:

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y^*(0) \\ y^{*(1)}(0) \end{bmatrix}$$

$$y(0) = y^{*(1)}(0) + 2y^*(0) = 0$$

$$y^{(1)}(0) = y^{*(2)}(0) + 2y^{*(1)}(0) = 1$$

כמו כן קיים:

$$y^{*(2)}(0) + 2y^{*(1)}(0) - 3y^*(0) = 0$$

או:

$$y^{*(2)}(0) = 3y^*(0) - 2y^{*(1)}(0)$$

לכן :

$$\begin{cases} y(0) = y^{*(1)}(0) + 2y^*(0) = 0 \\ y^{(1)}(0) = 3y^*(0) - 2y^{*(1)}(0) + 2y^{*(1)}(0) = 3y^*(0) = 1 \end{cases}$$

מכאן :

$$\begin{aligned} y^*(0) &= \frac{1}{3} \\ y^{*(1)}(0) &= -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

ובסה"כ :

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

### 3.2 פתרון משוואות מצב בתחום הזמן

3.2.1. המבנה של הצגה באמצעות משתני מצב הוא :

$$(3.17) \quad \begin{cases} \dot{\underline{x}} = A\underline{x} + Bu \\ y = C \cdot \underline{x} + du \\ \underline{x}(0) \end{cases}$$

מטרת תהליך הפתרון היא מציאת ביטוי מפורש ל-  $y(t)$  מתוך הצגת המערכת באמצעות משתני מצב. לשם כך יהיה עלינו למצוא ביטוי מפורש עבור  $\underline{x}(t)$ , וקטור המצב. תהליך זה של פתרון מערכת בת  $n$  משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון, הוא אלטרנטיבי לפתרון המשוואה הדיפרנציאלית מסדר  $n$  המאפיינת את המערכת. את  $x(t)$  ניתן להפריד לשני חלקים :

$$(3.18) \quad \underline{x}(t) = \underline{x}_i(t) + \underline{x}_u(t)$$

$\underline{x}_i(t)$  נובע מתנאי ההתחלה (ZIR) ו-  $\underline{x}_u(t)$  מקורו בעירור (ZSR).

3.2.2. נחפש את  $\underline{x}_i(t)$ .

$x_i(t)$  פותר את המערכת  $\dot{\underline{x}} = A\underline{x}$  עם  $\underline{x}(0)$ . נפתח את  $x(t)$  לטור טיילור סביב  $t=0$ :

$$(3.19) \quad \underline{x}(t) = \underline{x}^{(0)}(0) + \frac{t}{1!} \underline{x}^{(1)}(0) + \frac{t^2}{2!} \underline{x}^{(2)}(0) + \dots + \frac{t^k}{k!} \underline{x}^{(k)}(0) + \dots$$

אבל :

$$\begin{aligned} \underline{x}^{(0)}(0) &= \underline{x}(0) \\ \underline{x}^{(1)}(0) &= A\underline{x}(0) \\ \underline{x}^{(2)}(0) &= A^2\underline{x}(0) = A\underline{x}^{(1)}(0) \\ &\vdots \\ \underline{x}^{(n)}(0) &= A^n\underline{x}(0) \end{aligned}$$

ולכן :

$$(3.20) \quad \begin{aligned} \underline{x}(t) &= \underline{x}(0) + \frac{t}{1!} A \underline{x}(0) + \dots + \frac{t^k}{k!} A^k \underline{x}(0) + \dots = \\ &= \left[ I + \frac{tA}{1!} + \frac{(tA)^2}{2!} + \dots + \frac{(tA)^k}{k!} + \dots \right] \underline{x}(0) \end{aligned}$$

כאשר  $I$  היא מטריצת היחידה.

כעת, אם נרחיב את הגדרת האקספוננט עבור מטריצות :

$$(3.21) \quad e^{At} \equiv I + \frac{tA}{1!} + \frac{(tA)^2}{2!} + \dots + \frac{(tA)^k}{k!} + \dots$$

נוכל לרשום :

$$\underline{x}(t) = e^{At} \underline{x}(0)$$

בצורה אנלוגית לחלוטין לפתרון המשוואה הסקלרית  $\dot{x} = ax$ .

מכאן :

$$(3.22) \quad \underline{x}_i(t) = e^{At} \underline{x}(0)$$

תהליך החישוב של  $e^{At}$  מעורר קשיים כך שהוא מתבצע ע"י פתוח לטור אינסופי. נציג שתי שיטות להתגבר על קושי זה.

(1) נניח שלמטריצה הריבועית  $A$  ממימד  $n$ , יש  $n$  ערכים עצמיים שונים. כלומר למשוואה :

$$(3.23) \quad \det[\lambda I - A] = 0$$

יש  $n$  שרשים שונים  $\lambda_i$ . ניתן להראות שניתן לרשום :

$$(3.24) \quad e^{At} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k A^k$$

כאשר המקדמים  $\alpha_k$  מקיימים :

$$(3.25) \quad e^{\lambda_i t} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \lambda_i^k$$

עבור כל  $n$  השורשים  $\lambda_i$  של המשוואה האופיינית.

נקבל מערכת של  $n$  משוואות ב- $n$  נעלמים עבור המקדמים  $\alpha_k$ , ונוכל לחשב את  $e^{At}$ .

דוגמא 3.3 : חשב :

$$e^{\begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -1 & -5 \end{bmatrix} t}$$

המשואה האופיינית היא :

$$\begin{vmatrix} \lambda & -6 \\ 1 & \lambda + 5 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda + 5) + 6 = \lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$$

שורשיה הם  $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = -3$

מקבלים מערכת :

$$\begin{cases} e^{-3t} = \alpha_0 + \alpha_1(-3) \\ e^{-2t} = \alpha_0 + \alpha_1(-2) \end{cases}$$

ופתרונה :

$$\begin{cases} \alpha_0 = 3e^{-2t} - 2e^{-3t} \\ \alpha_1 = e^{-2t} - e^{-3t} \end{cases}$$

עכשיו :

$$\begin{aligned} e^{At} &= \alpha_0 I + \alpha_1 A = \begin{bmatrix} \alpha_0 & 0 \\ 0 & \alpha_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 6\alpha_1 \\ -\alpha_1 & -5\alpha_1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3e^{-2t} - 2e^{-3t} & 6e^{-2t} - 6e^{-3t} \\ -e^{-2t} + e^{-3t} & -2e^{-2t} + 3e^{-3t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(2) נניח שוב שלמטריצה A יש n ערכים עצמיים שונים, כלומר קיימים  $\lambda_i$  שונים

המקיימים :

$$(3.26) \quad \det[\lambda I - A] = 0$$

נבנה את המטריצה הריבועית אלכסונית ממימד n :

$$(3.27) \quad \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

ואת המטריצה הריבועית ממימד n :

$$(3.28) \quad U = [\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_n]$$

אשר עמודותיה הן הוקטורים העצמיים  $\underline{u}_i$  של המטריצה A.

$\underline{u}_i$  הם הוקטורים המקיימים :

$$(3.29) \quad A\underline{u}_i = \lambda_i \underline{u}_i$$

כמו כן נחשב את  $U^{-1}$ , המטריצה ההפכית ל- $U$ . ניתן להראות שקיים:

$$(3.30) \quad A = U\Lambda U^{-1}$$

נחשב ע"י פתוח לטור את  $e^{At} = e^{U\Lambda U^{-1}t}$ :

$$(3.31) \quad e^{At} = e^{U\Lambda U^{-1}t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(U\Lambda U^{-1})^k}{k!} t^k$$

אבל:

$$(3.32) \quad (U\Lambda U^{-1})^k = U\Lambda U^{-1}U\Lambda U^{-1} \dots U\Lambda U^{-1} = U\Lambda^k U^{-1}$$

ולכן:

$$(3.33) \quad e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{U\Lambda^k U^{-1}}{k!} t^k = U \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Lambda^k t^k}{k!} \right] U^{-1} = U e^{\Lambda t} U^{-1}$$

מאחר ולמטריצה אלכסונית קיים:

$$(3.34) \quad e \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

מתקבלת תוצאה פשוטה ל- $e^{At}$ .

**דוגמא 3.4:** מצא  $e^{\begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -1 & -5 \end{bmatrix} t}$ .

מצאנו בדוגמה הקודמת ש- $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = -3$

נמצא את  $u_1$ :

$$A\mathbf{u}_1 = \lambda_1 \mathbf{u}_1$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 6b_1 = -2a_1 \\ -a_1 - 5b_1 = -2b_1 \end{cases}$$

מקבלים משוואה יחידה  $-3b_1 = a_1$ .

ניקח:

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

נמצא את  $u_2$ :

$$A\mathbf{u}_2 = \lambda_2 \mathbf{u}_2$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} = -3 \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix}$$



$$\begin{cases} 6b_2 = -3a_2 \\ -a_2 - 5b_2 = -3b_2 \end{cases}$$

מקבלים משוואה יחידה  $-2b_2 = a_2$ .

ניקח:

$$\underline{u}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

קבלנו:

$$U = [\underline{u}_1, \underline{u}_2] = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

קל למצוא ש-

$$U^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

ומכאן:

$$\begin{aligned} e^{At} &= \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -3e^{-2t} & -2e^{-3t} \\ e^{-2t} & e^{-3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3e^{-2t} - 2e^{-3t} & 6e^{-2t} - 6e^{-3t} \\ -e^{-2t} + e^{-3t} & -2e^{-2t} + 3e^{-3t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

כצפוי, הפתרון זהה לזה שמצאנו בשיטה הראשונה, בדוגמא 3.3.:

3.2.3. נמצא את  $x_u(t)$ , התגובה לעירור.

$x_u(t)$  פותר את המערכת:

$$(3.35) \quad \begin{cases} \dot{\underline{x}} = A\underline{x} + B\underline{u} \\ \underline{x}(0) = 0 \end{cases}$$

נוכח, ע"י הצבה ישירה במשוואה, שהפתרון הוא:

$$(3.36) \quad \underline{x}_u(t) = \int_0^t e^{A(t-t')} B \underline{u}(t') dt'$$

קיים:

$$(3.37) \quad \frac{d}{dt} \int_0^t \underline{f}(t, t') dt' = \underline{f}(t, t) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} \underline{f}(t, t') dt'$$

לכן :

$$(3.38) \quad \begin{aligned} \dot{\underline{x}}_u(t) &= e^{A(t-t')}Bu(t) + \int_0^t Ae^{A(t-t')}Bu(t')dt' \\ &= Bu(t) + A \int_0^t e^{A(t-t')}Bu(t')dt' = A\underline{x}_u + Bu \end{aligned}$$

אנו רואים שהפתרון מקיים את משוואת המצב. נודא שהוא מקיים את תנאי ההתחלה :

$$(3.39) \quad \underline{x}_u(0) = \int_0^{t=0} e^{A(t-t')}Bu(t')dt' \equiv 0$$

3.2.4. נוכל כעת לרשום את הפתרון הכללי למערכת :

$$(3.40) \quad \begin{cases} \dot{\underline{x}} = A\underline{x} + Bu \\ y = C\underline{x} + du \\ \underline{x}(0) \end{cases}$$

הפתרון הוא :

$$(3.41) \quad \underline{x}(t) = e^{At}\underline{x}(0) + \int_0^t e^{A(t-t')}Bu(t')dt'$$

$$y = C \cdot \underline{x} + du$$

**דוגמא 3.5 :** מצא את התגובה  $y(t)$  לעירור  $u(t) = \delta_0(t)$ ,

כאשר :

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -1 & -5 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = [0 \quad 3] \underline{x}$$

ונתון :

$$\underline{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{x} = \underline{x}_i + \underline{x}_u$$

$$\underline{x}_i = e^{\begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -1 & -5 \end{bmatrix} t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3e^{-2t} - 2e^{-3t} & 6e^{-2t} - 6e^{-3t} \\ -e^{-2t} + e^{-3t} & -2e^{-2t} + 3e^{-3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6e^{-2t} - 6e^{-3t} \\ -2e^{-2t} + 3e^{-3t} \end{bmatrix}$$

$$\underline{x}_u = \int_0^t e^{A(t-t')} \underline{B} \delta_0(t') dt' = e^{At} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3e^{-2t} - 2e^{-3t} \\ -e^{-2t} + e^{-3t} \end{bmatrix}$$

$$\underline{x} = \underline{x}_i + \underline{x}_u = \begin{bmatrix} 9e^{-2t} - 8e^{-3t} \\ -3e^{-2t} + 4e^{-3t} \end{bmatrix}$$

$$y = [0 \quad 3] \underline{x} = -9e^{-2t} + 12e^{-3t}$$

3.3.1. הצגת מערכת באמצעות משתני מצב היא :

$$(3.42) \quad \begin{cases} \dot{\underline{x}} = A\underline{x} + Bu \\ y = C\underline{x} + du \\ \underline{x}(0) \end{cases}$$

כשם שנעזרנו בשיטות התמרת לפלס בפתרון משוואה דיפרנציאלית מסדר n, נעזר בהתמרת לפלס כדי לפתור את מערכת משוואות המצב. ניקח התמרת לפלס מהמשוואה :

$$(3.43) \quad L\{\dot{\underline{x}}(t)\} = s\underline{X}(s) - \underline{x}(0)$$

$$(3.44) \quad L\{A\underline{x} + Bu\} = A\underline{X}(s) + BU(s)$$

המשוואה שתתקבל היא :

$$(3.45) \quad s\underline{X}(s) - \underline{x}(0) = A\underline{X}(s) + BU(s)$$

נבודד את  $\underline{X}(s)$  :

$$(3.46) \quad [sI - A]\underline{X}(s) = \underline{x}(0) + BU(s)$$

$$(3.47) \quad \underline{X}(s) = [sI - A]^{-1} \underline{x}(0) + [sI - A]^{-1} BU(s)$$

כעת :

$$(3.48) \quad \begin{aligned} Y(s) &= C\underline{X}(s) + dU(s) = C[sI - A]^{-1} \underline{x}(0) + C[sI - A]^{-1} BU(s) + dU(s) \\ Y(s) &= C[sI - A]^{-1} \underline{x}(0) + C[sI - A]^{-1} BU(s) + dU(s) \end{aligned}$$

קבלנו את  $Y(s)$  כפונקציה של ההתמרה של העירור ושל ערכי ההתחלה. פונקציות התמסורת של מערכת היא היחס בין ההתמרה של התגובה להתמרת העירור, כאשר ערכי ההתחלה הם אפס כולם. קל לראות שמקבלים :

$$(3.49) \quad G(s) = C[sI - A]^{-1} B + d$$

גילינו כאן דרך למציאת פונקציות התמסורת של מערכת ישירות מתוך הצגת משתני המצב שלה. מתוך פונקציות התמסורת ניתן לקבל בקלות גם את המשוואה הדיפרנציאלית המתארת את המערכת. מאלגברה ליניארית ידוע ש :

$$[sI - A]^{-1} = \frac{\text{Adj}[sI - A]}{\det[sI - A]}$$

כאן רואים בעליל ש-  $\det[sI - A]$  הוא המכנה של פונקציות התמסורת, או במלים אחרות הפולינום האופייני של המערכת. שרשי המשוואה האופיינית הם לפיכך שרשי המשוואה  $\det[sI - A] = 0$ .

מכל ההצגות השונות של מערכת ע"י משתני מצב ניתן להגיע לפונקציות התמסורת של המערכת. לכן, דרך שיטתית לבדוק האם שתי הצגות משתני מצב שונות מתארות מערכת זהה, היא ע"י בדיקה אם הן מוליכות לאותה פונקציות תמסורת.

3.3.2. ניתן לקבל הצגות משתני מצב שבהן המטריצה הדינמית A היא מטריצה אלכסונית ישירות מתוך פונקצית התמסורת G(s) של המערכת. הצגות כאלה קרויות הצגות אלכסוניות.

נפתח את G(s) לשברים חלקיים, ונניח שכל שרשי המשוואה האופיינית שונים זה מזה. נקבל:

$$(3.50) \quad G(s) = p_0 + \frac{p_1}{s-s_1} + \frac{p_2}{s-s_2} + \dots + \frac{p_n}{s-s_n}$$

(1) ניקח:

$$(3.51) \quad A = \begin{bmatrix} s_1 & & & 0 \\ & s_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & s_n \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, C = [p_1 \dots p_n], d = p_0$$

ע"י חישוב  $G(s) = C[sI - A]^{-1}B + d$  נווכח שקבלנו הצגת משתני מצב המתארת את המערכת שפונקצית התמסורת שלה היא G(s).

(2) ניקח:

$$(3.52) \quad A = \begin{bmatrix} s_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & s_n \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix}, C = [1 \ 1 \dots 1], d = p_0$$

גם הצגת משתני מצב זו מתאימה למערכת שפונקצית המעבר שלה היא G(s). הצגה זו קרויה **הצגה הקונונית האלכסונית** של מערכת באמצעות משתני מצב.

**דוגמא 3.6:** מצא הצגת משתני מצב קונונית עבור המערכת המתוארת ע"י המשוואה הדיפרנציאלית:

$$y^{(2)} + 5y^{(1)} + 6y = 4u^{(1)} + 9u$$

עם תנאי ההתחלה  $y(0)=1; y^{(1)}(0)$ . פונקצית התמסורת של המערכת היא:

$$G(s) = \frac{1}{s+2} + \frac{3}{s+3}$$

ההצגה הקונונית היא:

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} u, y = [1 \ 1] \underline{x}$$

עלינו למצוא את  $\underline{x}(0)$ .

$$\begin{cases} y(0) = [1 \quad 1]\underline{x}(0) = x_1(0) + x_2(0) = 1 \\ y^{(1)}(0) = [1 \quad 1]\underline{x}^{(1)}(0) = [1 \quad 1]A\underline{x}(0) = [1 \quad 1] \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \underline{x}(0) \\ = [-2 \quad -3]\underline{x}(0) = -2x_1(0) - 3x_2(0) = 2 \end{cases}$$

מכאן:

$$\begin{aligned} x_2(0) &= -4; x_1(0) = 5 \\ \underline{x}(0) &= \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

בכך הושלמה ההצגה הקונונית.

**הערה:** בכל הדוגמאות שפתרנו, התקיים  $d=0$  בהצגת משתני המצב. קל לראות שתופעה זו קיימת בכל המערכות אשר מעלת המכנה של פונקציית התמסורת שלהן גדולה ממש ממעלת המונה. במלים אחרות, במשואה הדיפרנציאלית המתארת את המערכת:

$$\sum_{k=0}^n a_k y^{(k)} = \sum_{k=0}^m b_k u^{(k)}$$

קיום  $d=0$  גורר  $m < n$ .

מאחר ובמצואות אין המערכת מגיבה מיידית לאותות בכניסה וזמן העלייה (rise time) של אות היציאה אינו אפס, חייב  $d$  להיות אפס במערכות מעשיות.

3.4. עד כה עסקנו בתיאור מערכת עם כניסה אחת ויציאה אחת בעזרת משתני מצב. אחד היתרונות של תאור בעזרת משתנים כאלה הוא בעובדה שניתן להכליל תאור זה למקרה של מערכות ליניאריות רבות משתנים, דהיינו מערכות עם מספר כניסות ומספר יציאות.

נתבונן במערכת בעלת אותות הכניסה  $u_1, u_2, \dots, u_\ell$  ואותות היציאה  $y_1, y_2, \dots, y_m$ . אם המערכת

היא מסדר  $n$  נוכל לייצגה ע"י  $n$  משתני המצב  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . נגדיר:

$$(3.53) \quad \underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \underline{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}, \underline{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_\ell \end{bmatrix}$$

ונקבל את ההצגה:

$$(3.54) \quad \begin{cases} \dot{\underline{x}} = A\underline{x} + B\underline{u} \\ \underline{y} = C\underline{x} + D\underline{u} \end{cases}$$

כשהמטריצות  $A, B, C$  ו- $D$  הן  $(n \times n)$ ,  $(n \times \ell)$ ,  $(m \times n)$  ו- $(m \times \ell)$ , בהתאמה.

"פונקציית התמסורת של מערכת זו אשר אמורה ע"י כפל בוקטור ההתמרה  $\underline{U}(s)$  לתת את  $\underline{Y}(s)$  חייבת להיות מטריצה. מטריצה זו נקראת מטריצת התמסורת של המערכת ובמקרה הנדון הנה

מטריצה של  $m$  שורות ו- $\ell$  עמודות. האבר ה- $(i,j)$  בה מציין את פונקצית התמסורת של הערוץ המחבר את הכניסה ה- $j$  ליציאה ה- $i$ .  
 ע"י הפעלת התמרת לפלס על מערכת משוואות המצב הנ"ל נקבל כי :

$$(3.55) \quad s\underline{X}(s) = A\underline{X}(s) + BU(s) + \underline{x}(0)$$

כאן :

$$(3.56) \quad \underline{X}(s) = [sI - A]^{-1} BU(s) + [sI - A]^{-1} \underline{x}(0)$$

או :

$$(3.57) \quad Y(s) = [D + C^T [sI - A]^{-1} B] U(s) + C^T [sI - A]^{-1} \underline{x}(0)$$

מאחר ומטריצת התמסורת (בדומה לפונקצית התמסורת) מתוארת עבור מקרה בו  $\underline{x}(0)=0$  נמצא כי מטריצת התמסורת ניתנת ע"י :

$$(3.58) \quad G(s) = C[sI - A]^{-1} B + D$$

#### 4. יציבות וניתוח מערכות בתחום התדר

##### 4.1. תגובת תדר ועקומות בודה

"תגובת התדר" של מערכת היא תאור תגובתה של המערכת לעירור סינוסואידלי במצב היציב. נניח שלמערכת יציבה מסוימת יש פונקציית תמסורת  $G(s)$  שהיא מנת פולינומים ב- $s$ . נעורר אותה באות סינוסואידלי  $x(t) = A \sin \omega t$ , ונסמן את התגובה  $y(t)$ . התמרת לפלס של התגובה היא:

$$(4.1) \quad Y(s) = G(s)X(s) = G(s) \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2}$$

נפרק את התגובה  $Y(s)$  לשברים חלקיים; חלק מהביטויים ייתרמו ע"י קטבי  $G(s)$ , וחלקם ע"י "קטבי" העירור ( $s = \pm j\omega$ ). לקבלת תגובת הזמן נבצע התמרת לפלס הפוכה של  $Y(s)$ : מכיוון שהמערכת יציבה הביטויים שמקורם בקטבי  $G(s)$  יתרמו פונקציות אקספוננציאליות מרוסנות, ורק הביטויים שמקורם ב"קטבי" העירור יתרמו פונקציות שאינן אפס במצב היציב. במפורש, מקבלים:

$$(4.2) \quad y_{ss}(s) = \frac{AG(j\omega)}{2j(s-j\omega)} + \frac{AG(-j\omega)}{-2j(s+j\omega)}$$

ולאחר התמרה הפוכה:

$$(4.3) \quad y_{ss}(t) = A|G(j\omega)| \sin[\omega t + \arg G(j\omega)]$$

( $|G(j\omega)|$ ) הוא הערך המוחלט של המספר המרוכב  $G(j\omega)$ ,  $\arg G(j\omega)$  היא הזווית שלו).

המסקנה מהדיון האחרון היא שכאשר מעוררים מערכת יציבה ע"י אות סינוסואידלי בתדר  $\omega$ , תגובתה במצב היציב סינוסואידלית בתדר  $\omega$  אף היא. היחס בין אמפליטודת התגובה לאמפליטודת העירור, והפרש הפאזות בין התגובה לבין העירור תלויים אך ורק בפונקציית התמסורת  $G(s)$ , שמקבלת כאן את הצורה  $G(j\omega)$ .

במקרים רבים נהוג לייצג את העירור והתגובה ע"י פאזורים. אם נסמן את פאזור העירור  $\tilde{U}$  ואת פאזור התגובה במצב היציב  $\tilde{Y}_{ss}$ , נוכל לרשום בכתוב פאזורי:

$$(4.4) \quad \frac{\tilde{Y}_{ss}}{\tilde{U}} = |G(j\omega)| \angle \arg G(j\omega)$$

$G(j\omega)$  היא פונקציית התמסורת  $G(s)$  כאשר מציבים  $s = j\omega$ , והיא מגדירה את תגובת התדר של המערכת (כתלות ב- $\omega$ ).  $G(j\omega)$  נרשמת בכתוב קטבי באופן  $|G(j\omega)| \angle \arg G(j\omega)$ .

**דוגמא 4.1:** מהי תגובת התדר של מערכת שפונקציית התמסורת שלה היא

$$G(s) = \frac{s+5}{s^2+2s+1} ?$$

נציב  $s=j\omega$  בפונקציית התמסורת:

$$G(s=j\omega) = \frac{j\omega+5}{(j\omega)^2+2j\omega+1} = \frac{5+j\omega}{(j\omega+1)^2}$$

בצורה קוטבית נוכל לרשום:

$$G(j\omega) = \sqrt{\frac{25+\omega^2}{(1-\omega^2)^2+4\omega^2}} \angle \left[ \text{tg}^{-1} \frac{\omega}{5} - 2\text{tg}^{-1} \omega \right]$$

עתה, עבור כל  $\omega$  מבוקש נוכל למצוא את יחס האמפליטודות בין המוצא לבין העירור הסינוסואידלי, ואת הפרש הפאזות ביניהם. בפרט, עבור עירור סינוסואידלי  $x=A \sin \omega t$  התגובה היא:

$$y = A \sqrt{\frac{25+\omega^2}{(1-\omega^2)^2+4\omega^2}} \sin \left[ \omega t + \text{tg}^{-1} \frac{\omega}{5} - 2\text{tg}^{-1} \omega \right]$$

תגובת התדר היא תכונה יסודית של המערכת, ובדרך כלל מעוררת עניין רב. לעתים קרובות מיפרטים של מערכות ניתנים במונחים של תגובת תדר; דרישה אופיינית ממערכת  $H_i F_i$  היא:

$$|G(j\omega)| = \text{const} \quad \text{עבור} \quad 20\text{Hz} < f = \frac{\omega}{2\pi} < 20\text{kHz}, \quad \text{ו-} \quad |G(j\omega)| \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} 0$$

תגובת תדר ניתנת למדידה, לעתים קרובות, בצורה פשוטה. לכן חקירת מערכת מתחילה בדרך כלל במדידה ישירה של תגובת התדר שלה למשל (ע"י מחולל אותות ואוסצילוסקופ). תגובת התדר מציגה את תכונותיה של המערכת, וטרנספורם פורייה מקשר בינה לבין תגובת המערכת לעירור בתחום הזמן.

4.1.1. דיאגרמות בודה הן תאור גרפי של  $G(j\omega) = |G(j\omega)| \angle \arg G(j\omega)$ , היינו של תגובת התדר של

המערכת. דיאגרמה אחת מתארת את הערך המוחלט  $|G(j\omega)|$  כתלות בתדר, ודיאגרמה שניה מתארת את הפאזה  $\arg G(j\omega)$  כתלות בתדר.

ליתר דיוק, הגרף הראשון מתאר את  $20 \log_{10} |G(j\omega)|$  כנגד  $\log_{10} \omega$ , והגרף השני מתאר את  $\arg G(j\omega)$  כנגד  $\log_{10} \omega$ .

קיימות מספר סיבות לכך שבוחרים סקלות לוגריתמיות עבור  $\omega$  ועבור  $|G(j\omega)|$ . כפי שנוכח בהמשך, סקלות אלו מאפשרות קרוב של עקומות בודה לקווים ישרים, ומאפשרות לבנות עקומות בודה עבור מערכות מורכבות מתוך עקומות בודה הידועות של מספר פונקציות יסודיות. נציין מספר מושגים הקשורים בסקלות לוגריתמיות:



המרחק **בדקדוק** בין  $\omega_1$  לבין  $\omega_2$  הוא  $\log_{10} \frac{\omega_1}{\omega_2}$  : המרחק בין  $\omega_1$  לבין  $\omega_2$  הוא דקדה אחת כאשר

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = 10$$

המרחק **באוקטבות** בין  $\omega_1$  לבין  $\omega_2$  הוא  $\log_2 \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\log \frac{\omega_1}{\omega_2}}{\log 2}$  : המרחק בין  $\omega_1$  לבין  $\omega_2$  הוא

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = 2 \text{ אוקטבה אחת כאשר}$$

כמו כן אנו אומרים שהערך  $20 \log_{10} |G(j\omega)|$  נמדד בדציבלים (dB). מכאן, הגבר  $|G(j\omega)| = 1$  מתאים ל-0 dB, הגבר  $|G(j\omega)| = 10$  מתאים ל-20 dB, והגבר 0.1 מתאים ל-20dB-.

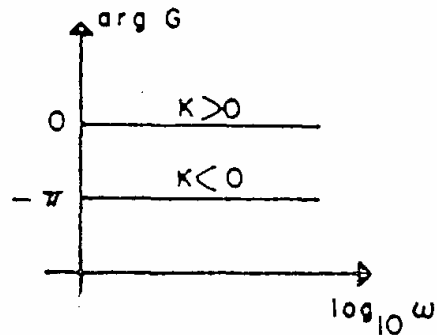
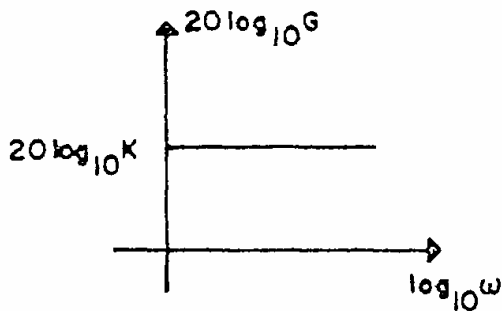
נתאר עתה את עקומי בודה עבור מספר פונקציות יסודיות :

$$G(j\omega) = K \text{ (קבוע)} \quad (1)$$

במקרה זה עקומי בודה פשוטים ביותר.

$$(4.5) \quad 20 \log_{10} [G(j\omega)] = 20 \log_{10} K$$

$$(4.6) \quad \arg G(j\omega) = \begin{cases} 0 & K > 0 \\ -\pi & K < 0 \end{cases}$$



$$G(j\omega) = (j\omega)^{-i} \text{ (קוטב מסדר } i \text{ בראשית)} \quad (2)$$

פונקציה זו מתארת מערכת שאינה יציבה לפי הגדרתנו. עם זאת, נשרטט גם כאן את עקומי בודה עבור  $G(j\omega)$ , מתוך הבנה ש- $G(j\omega)$  אינה מתארת את "התגובה במצב היציב לעירור סינוסואידלי".

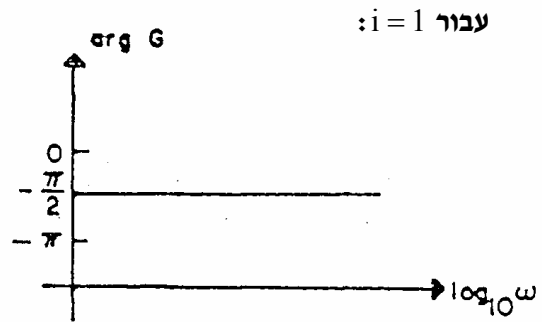
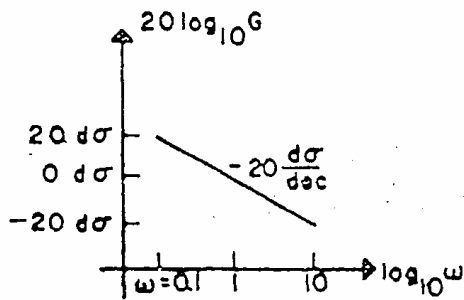
$$(4.7) \quad 20 \log_{10} |G(j\omega)| = 20 \log_{10} |(j\omega)^{-i}| = -20i \log_{10} |j\omega| = -20i \log_{10} \omega$$

לגרף האמפליטודה יהיה שיפוע שלילי בן  $-20i$  דציבל לדקדה.

$$(4.8) \quad \arg G(j\omega) = \arg (j\omega)^{-1} = -i \frac{\pi}{2}$$

גרף הזווית הוא ישר אופקי.

שים לב לכך שבתדר  $\omega = 1$  עקומת ההגבר חוצה את ציר ה-  $|G|$  ב  $0\text{dB}$ .

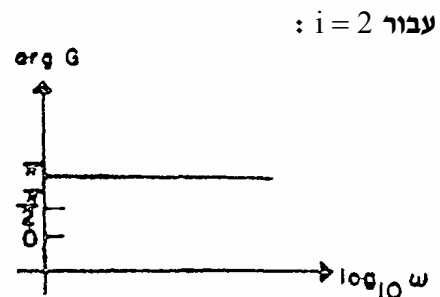
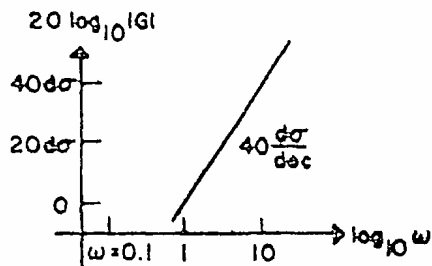


$$(3) \quad G(j\omega) = (j\omega)^i \quad (\text{אפס מסדר } i \text{ בראשית):}$$

$$(4.9) \quad 20\log_{10}|G(j\omega)| = 20\log_{10}|(j\omega)^i| = 20i\log_{10}\omega$$

כאן השיפוע הוא  $20i$  דציבל לדקדה.

$$(4.10) \quad \arg G(j\omega) = \arg(j\omega)^i = i \frac{\pi}{2}$$



$$(4) \quad G(j\omega) = 1 + j \frac{\omega}{\omega_n} \quad (\text{אפס בחלקו השמאלי של מישור } s) \quad (\omega_n > 0)$$

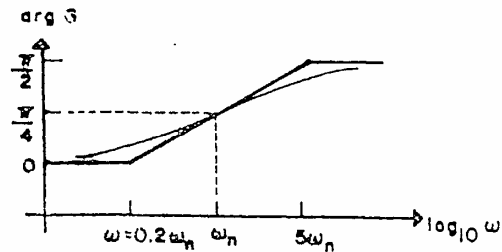
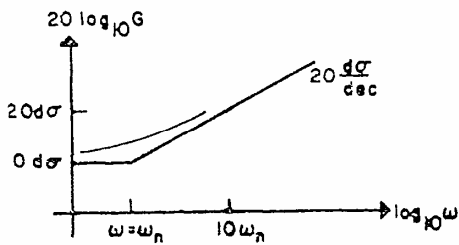
$$(4.11) \quad 20\log_{10}|G(j\omega)| = 20\log_{10}\left|1 + j \frac{\omega}{\omega_n}\right| = 20\log_{10}\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} = 10\log\left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]$$

$$(4.12) \quad \arg G(j\omega) = \arg\left[1 + j \frac{\omega}{\omega_n}\right] = \text{tg}^{-1} \frac{\omega}{\omega_n}$$

לפונקציות אלו יש אסימפטוטות:

$$\begin{cases} 20 \log_{10} \left| 1 + j \frac{\omega}{\omega_n} \right| \xrightarrow{\omega \ll \omega_n} 0 \text{ dB} \\ \text{tg}^{-1} \frac{\omega}{\omega_n} \xrightarrow{\omega \ll \omega_n} 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 20 \log_{10} \left| 1 + j \frac{\omega}{\omega_n} \right| \xrightarrow{\omega \gg \omega_n} 20 \log_{10} \frac{\omega}{\omega_n} \\ \text{tg}^{-1} \frac{\omega}{\omega_n} \xrightarrow{\omega \gg \omega_n} \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

בחקירה ראשונית של מערכות נוח להחליף את עקומות בודה המדויקות בעקומות אסימפטוטיות-מקורבות. הגרפים הבאים כוללים גם את עקומות בודה האמיתית, וגם את הקירוב האסימפטוטי לעקומות בודה. שים לב, שהעקומה האסימפטוטית של הזווית כוללת קטע המחבר את הנקודות  $\left( \omega = \frac{1}{5} \omega_n, \phi = 0 \right)$  ו-  $\left( \omega = 5 \omega_n, \phi = \frac{\pi}{2} \right)$ . קטע זה משיק לעקומת בודה האמיתית בנקודה בה  $\omega = \omega_n$ . הוא גם התדר בו נפגשות האסימפטוטות בגרף האמפליטודה. התדר  $\omega = \omega_n$  קרוי **תדר הברך**.

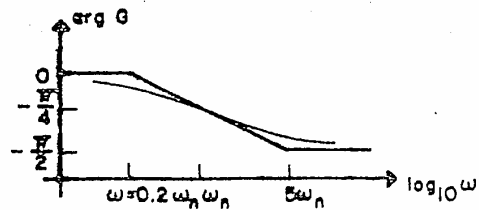
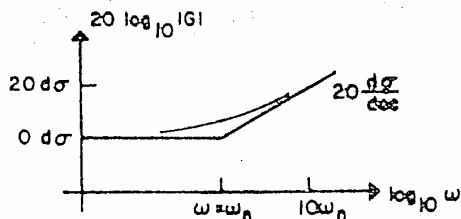


התיאור הגרפי של אפס מסדר  $i$ ,  $G(j\omega) = \left[ 1 + j \frac{\omega}{\omega_n} \right]^i$ , שונה מהגרפים למעלה רק בכך שהזווית משתנה בתחום  $0 \leq \arg(G) < i \frac{\pi}{2}$ , ושהשיפוע של גרף האמפליטודה עבור  $\omega \gg \omega_n$

שואף ל-  $20i \frac{\text{dB}}{\text{dec}}$ .

$$(5) \quad G(j\omega) = 1 + j \frac{\omega}{\omega_n} \quad (\omega_n < 0) \quad (\text{אפס בחלקו הימני של מישור s})$$

קל להוכיח שעקומת האמפליטודה זהה במקרה זה לעקומת האמפליטודה של אפס בחלקו השמאלי של מישור s; הזווית לעומת זאת משתנה בתחום  $-\frac{\pi}{2} < \arg(G) \leq 0$ : במקרה זה גרף הזווית סימטרית לגרף הזווית של אפס בחלקו השמאלי של מישור s, ביחס לקו האופקי  $\arg G = 0$ . עקומות בודה המדויקות והאסימפטוטיות משורטטות להלן:



עבור אפס מסדר  $i$ ,  $G(j\omega) = \left[1 + j\frac{\omega}{\omega_n}\right]^i$ , הזווית תשתנה בתחום  $-i\frac{\pi}{2} < \arg G \leq 0$ ,

ושיפוע גרף האמפליטודה החל מתדירות הברך ואילך יהיה אסימפטוטי ל-  $20i \frac{dB}{dec}$ .

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_n}} \quad (6) \quad (\omega_n > 0) \text{ (קוטב בחלקו השמאלי של מישור s)}$$

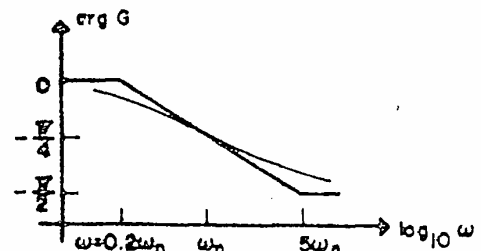
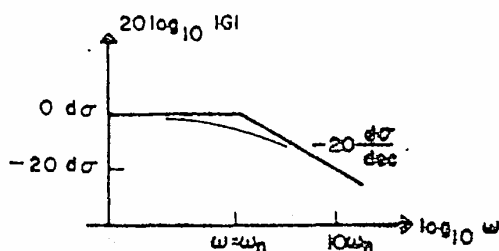
$$(4.13) \quad 20 \log_{10} |G(j\omega)| = 20 \log_{10} \left| \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_n}} \right| = -20 \log_{10} \left| 1 + j\frac{\omega}{\omega_n} \right|$$

עקומת האמפליטודה במקרה זה סימטרית לעקומת האמפליטודה של אפס (שתוארה במקרים (4), (5)) ביחס לציר  $0dB$ . החל מתדירות הברך העקומה האסימפטוטית **תרד**, בקצב של

$$-20 \frac{dB}{dec}$$

$$(4.14) \quad \arg G(j\omega) = -\operatorname{tg}^{-1} \frac{\omega}{\omega_n}$$

עקומת הזווית זהה לעקומת הזווית של אפס בחלקו הימני של מישור s (שתוארה במקרה 5).

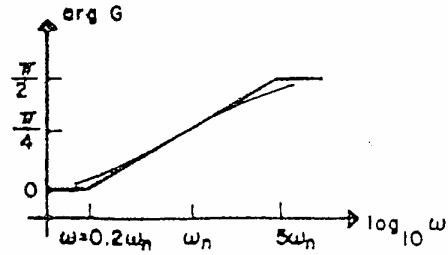
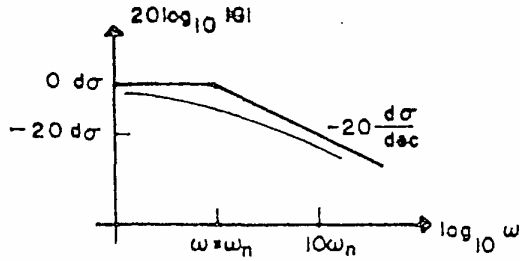


עבור קוטב מסדר  $i$ ,  $G(j\omega) = \frac{1}{\left[1 + j\frac{\omega}{\omega_n}\right]^i}$ , הזווית תרד עד  $-i\frac{\pi}{2}$ , ושעור הירידה בגרף

האמפליטודה מעל לתדירות הברך ישאף ל-  $-20i \frac{dB}{dec}$ .

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_n}} \quad (7) \quad (\omega_n < 0) \text{ (קוטב בחלקו הימני של מישור s)}$$

כבמקרה (2), גם כאן המערכת איננה יציבה. קל להוכיח שעקומת האמפליטודה זהה במקרה זה לעקומת האמפליטודה של קוטב בחלקו השמאלי של מישור s שתוארה במקרה (6), בעוד שעקומת הזווית כאן תהא זהה לעקומת הזווית של אפס בחלקו השמאלי של מישור s, שתוארה במקרה (4).



בעקומות בודה של קוטב מסדר  $i$ ,  $G(j\omega) = \frac{1}{[1 + j\frac{\omega}{\omega_n}]^i}$ ,  $(\omega_n < 0)$ , הזווית תשתנה

בתחום  $0 \leq \arg(G) < i\frac{\pi}{2}$ ; קצב ירידת האמפליטודה מעל לתדירות הברך יהיה  $-20i \frac{dB}{dec}$ .

$$(8) \quad G(j\omega) = \frac{1}{1 + 2\xi j\frac{\omega}{\omega_n} - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \quad (-1 < \xi < 1) \quad (\text{זוג קטבים מרוכבים}):$$

עבור  $\xi \geq 1$  או  $\xi \leq -1$  ניתן לפרק את הביטוי לשני קטבים ממשיים מסדר ראשון, מהסוג בו טפלו במקרים הקודמים. המקרים הגבוליים  $\xi = 1$  ו-  $\xi = -1$  מתייחסים לקטבים כפולים [קטבים מסדר שני] שאף בהם טפלו. סעיף זה מתייחס אם כך רק למקרים  $-1 < \xi < 1$ .

כאשר  $\xi$  שלילי לקטבים חלק ממשי חיובי.

כאשר  $\xi$  חיובי לקטבים חלק ממשי שלילי.

במקרה הגבולי בו  $\xi=0$  הקטבים דמיוניים טהורים.

$$(4.15) \quad 20 \log_{10} \left| \frac{1}{1 + 2\xi j\frac{\omega}{\omega_n} - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \right| = -20 \log_{10} \left| 1 + 2\xi j\frac{\omega}{\omega_n} - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 \right|$$

$$= -10 \log_{10} \left[ \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(\frac{2\xi\omega}{\omega_n}\right)^2 \right]$$

$$(4.16) \quad \arg \left[ \frac{1}{1 + 2\xi j\frac{\omega}{\omega_n} - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \right] = -\tan^{-1} \frac{2\xi\omega/\omega_n}{1 - \omega^2/\omega_n^2}$$

גם במקרה זה ניתן לשרטט גרפים אסימפטוטיים:

עבור  $\omega \ll \omega_n$  קיים:

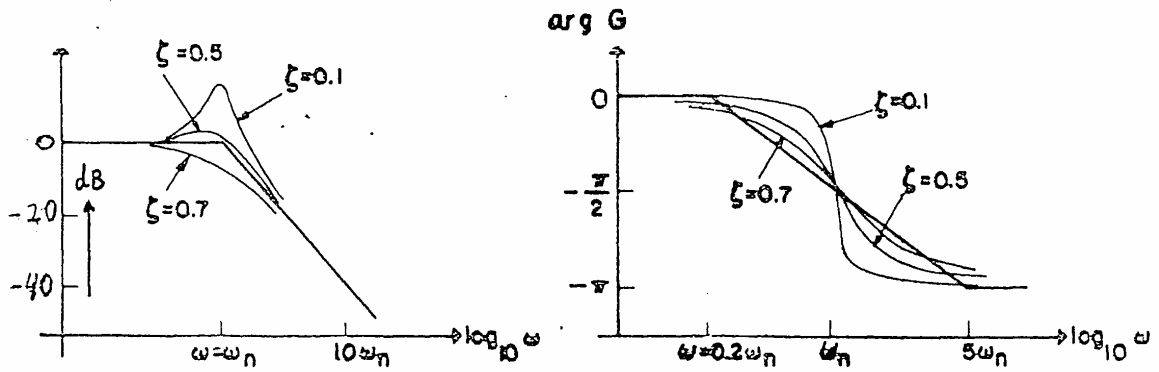
$$\begin{cases} 20\log_{10}|G(j\omega)| \xrightarrow{\omega \ll \omega_n} 0 \\ \arg G(j\omega) \xrightarrow{\omega \ll \omega_n} 0 \end{cases}$$

ועבור  $\omega \gg \omega_n$  קיים:

$$\begin{cases} 20\log_{10}|G(j\omega)| \xrightarrow{\omega \gg \omega_n} -40\log_{10} \frac{\omega}{\omega_n} \\ \arg G(j\omega) \xrightarrow{\omega \gg \omega_n} \begin{cases} \pi & \xi < 0 \\ 0 & \xi = 0 \\ -\pi & \xi > 0 \end{cases} \end{cases}$$

בגרפים הבאים משורטטות העקומות האסימפטוטיות (עבור  $0 < \xi < 1$ ), וכן העקומות

האמיתיות עבור 3 ערכי  $\xi$ : 0.1, 0.5, 0.7.



$$G(j\omega) = 1 + \frac{2\xi j\omega}{\omega_n} - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 \quad (9) \quad (-1 < \xi < 1) \text{ (זוג אפסים מרוכבים):}$$

במקרה זה הגרפים סימטריים לגרפים של זוג קטבים מרוכבים (שתוארו במקרה (8)) ביחס לצירי ההגבר (dB) והפאזה.

נרחיב מעט את חקירת מקרה (8) - זוג קטבים מרוכבים. תתגלנה לנו התכונות הבאות:

(א) לעקומה האמיתית  $20\log_{10}|G(j\omega)|$ , עבור  $0 < \xi < \frac{1}{\sqrt{2}}$  יש מקסימום ב-

$$\omega_m = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2} \quad \text{ערך הפונקציה באותה נקודה הוא} \quad 20\log_{10} \frac{1}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}}$$

(ב) ההפרש בין הערך האמיתי  $20\log_{10}|G(j\omega)|$  עבור  $\omega = \omega_n$  לבין הערך האסימפטוטי הוא:

$$20\log_{10} \left[ \frac{1}{2\xi} \right]$$

קל ליישם מסקנות אלו גם למקרה (9) - זוג אפסים מרוכבים, בשנויים המתאימים.  
 אנו עוסקים במערכות שפונקצית התמסורת שלהן  $G(s)$  היא מנת פולינומים ב- $s$ . במקרים אלו ניתן להביא את  $G(j\omega)$  לצורה:

$$(4.17) \quad G(j\omega) = K(j\omega)^{\pm i} \left(1 + \frac{j\omega}{\omega_n}\right)^{\pm k} \dots \left(1 + \frac{2\xi\omega}{\omega_n} - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^{\pm n}$$

כלומר, ניתן להציג את  $G(j\omega)$  כמכפלה של פונקציות יסודיות, שאת עקומי בודה שלהן אנו מכירים. ע"י הפעלת לוגריתם על הפונקציה המרוכבת  $G(j\omega)$  ניתן להוכיח בקיומם של הקשרים הבאים:

$$(4.18) \quad 20\log_{10}|G(j\omega)| = 20\log_{10}K + 20\log_{10}|(j\omega)^{\pm i}| + 20\log_{10}\left|\left(1 + \frac{j\omega}{\omega_n}\right)^{\pm k}\right| + \dots$$

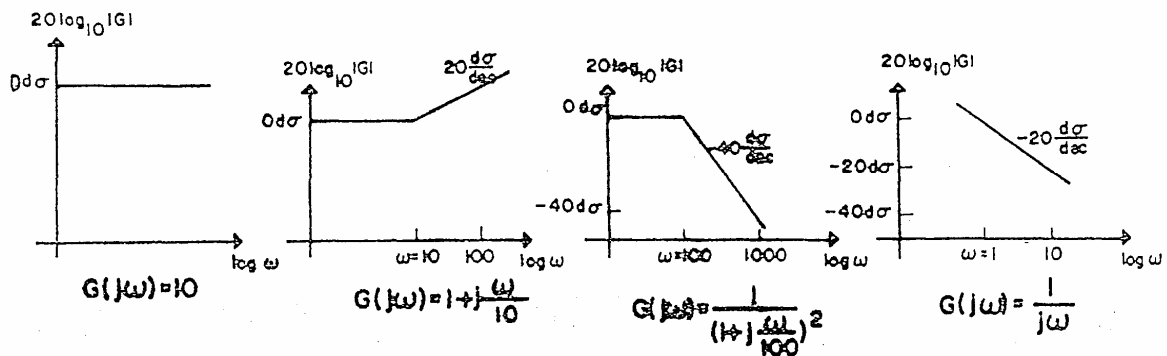
$$(4.19) \quad \arg G(j\omega) = \arg[(j\omega)^{\pm i}] + \arg\left[\left(1 + \frac{j\omega}{\omega_n}\right)^{\pm k}\right] + \arg K + \dots$$

משמעות השוויונים האחרונים היא שניתן לשרטט את עקומי בודה עבור  $G(j\omega)$  כסכום של עקומי בודה של הפונקציות היסודיות, אותם אנו מכירים. במיוחד, נוכל לשרטט בקלות את העקומות האסימפטוטיות.

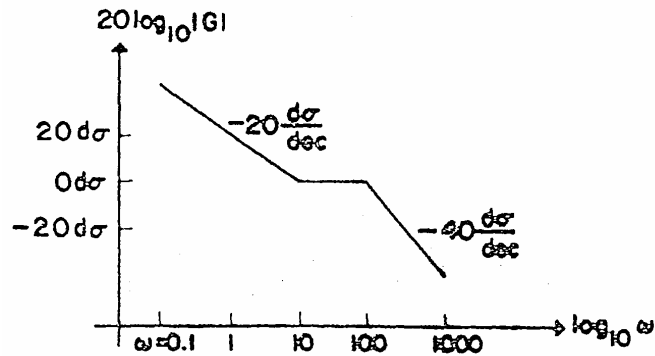
**דוגמא 4.2:** בנה את דיאגרמת בודה האסימפטוטית עבור:

$$G(j\omega) = 10 \frac{\left(1 + j\frac{\omega}{10}\right)}{j\omega \left(1 + j\frac{\omega}{100}\right)^2}$$

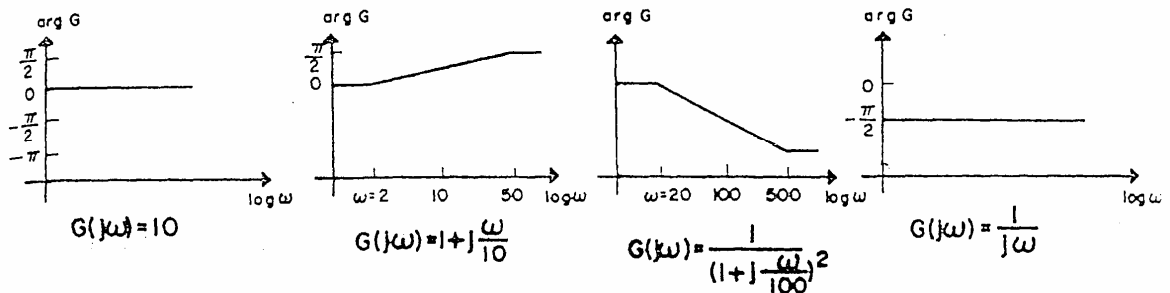
4 הגרפים הבאים מתארים את דיאגרמות האמפליטודה האסימפטוטיות של הפונקציות היסודיות המרכיבות את  $G(j\omega)$ :



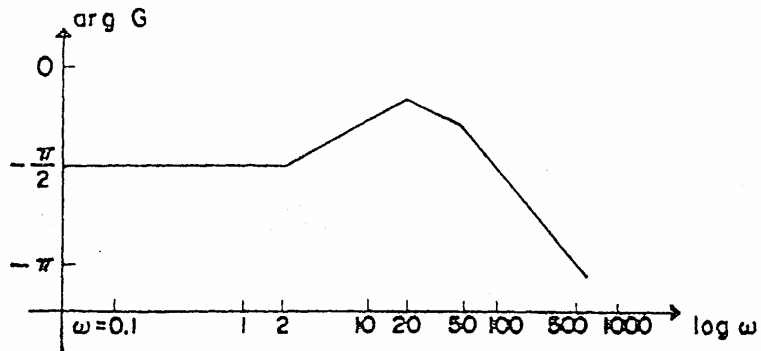
העקומה האסימפטוטית  $20\log|G(j\omega)|$  כנגד  $\log_{10}\omega$  היא סכום העקומות למעלה:



4 הגרפים הבאים מתארים את הדיאגרמות האסימפטוטיות של הזווית עבור הפונקציות היסודיות המרכיבות את  $G(j\omega)$ :



העקומה האסימפטוטית  $\arg G(j\omega)$  כנגד  $\log_{10}\omega$  היא סכום העקומות למעלה:



4.1.2. נדגים כיצד ניתן לשאוב אינפורמציה אודות המערכת מתוך עקומות בודה שלה, כשהן נתונות. (1) מתוך התבוננות בדיאגרמות האסימפטוטיות של הפונקציות היסודיות ניתן להוכיח שכל קוטב

נוטה לגרום לירידת עקומת האמפליטודה בקצב של  $-20 \frac{dB}{dec}$  בתדירויות שמעל לתדירות

הברך.

כל אפס נוטה לגרום לעליה בקצב של  $20 \frac{dB}{dec}$  בעקומת האמפליטודה מתדירות הברך ואילך.



ברור מכאן, שעבור  $\omega \rightarrow \infty$  השיפוע של העקומה  $20 \log_{10}|G|$  יהיה כפולה שלמה של  $20 \frac{\text{dB}}{\text{dec}}$ .

אם ב  $\omega \rightarrow \infty$  השיפוע של  $20 \log_{10}|G|$  הוא  $n \cdot 20 \frac{\text{dB}}{\text{dec}}$  אז  $n$  הוא ההפרש בין מספר האפסים לבין מספר הקטבים של פונקציית התמסורת  $G(j\omega)$ .

השיפוע של הדיאגרמה האסימפטוטית של  $G(j\omega)$  הוא כפולה שלמה של  $20 \frac{\text{dB}}{\text{dec}}$  עבור כל  $n$ . ניתן להסתייע בתכונה זו כאשר משרטטים את הדיאגרמה האסימפטוטית מתוך העקומה המדויקת.

(2) אם אין למערכת קטבים או אפסים בראשית הצירים קיים:

$$(4.20) \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} [20 \log_{10}|G(j\omega)|] = 20 \log_{10}|K|$$

כאשר  $|K|$  הוא הערך המוחלט של קבוע ההגבר של פונקציית התמסורת (כשהיא נרשמת בצורה  $\lim_{\omega \rightarrow 0} \arg G = 0$  אם מתקיים עתה  $|K| = K$ ; אחרת  $|K| = -K$ ).

(3) כאשר כל האפסים והקטבים של פונקציית התמסורת של מערכת נמצאים בחלקו השמאלי של מישור  $s$ , או אומרים שהמערכת היא בפאזה מינימלית. עבור מערכות בפאזה מינימלית עליה בפאזה ב-  $\frac{\pi}{2}$  עם עלית  $\omega$  תעיד תמיד על קיומו של אפס.

עבור מערכת בפאזה מינימלית, אם ידוע ש-  $K$  (קבוע ההגבר) הוא מספר חיובי וידוע כי  $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \arg(G) = n \frac{\pi}{2}$  אז  $n$  הוא ההפרש בין מספר האפסים ומספר הקטבים של פונקציית

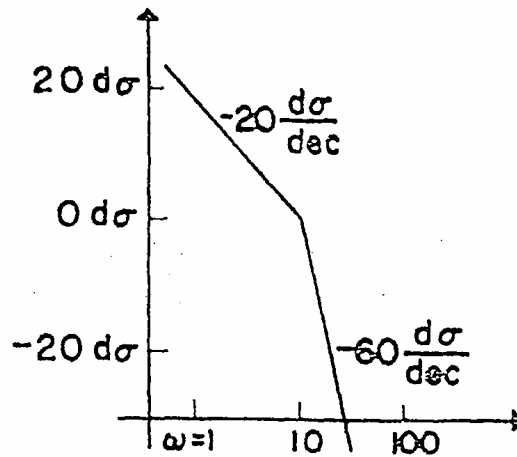
התמסורת (מתוך חקירת דיאגרמות בודה של הפונקציות היסודיות קל להוכיח ש-  $\arg G$  ישאף תמיד לכפולה שלמה של  $\frac{\pi}{2}$  כאשר  $\omega \rightarrow \infty$ ).

(4) אם ידוע שמערכת מסוימת היא בפאזה מינימלית ניתן לקבל את כל האינפורמציה אודותיה מתוך אחת הדיאגרמות בלבד: מתוך דיאגרמת האמפליטודה או מתוך דיאגרמת הפאזה. קיימת במקרה זה נוסחה מתמטית אשר מאפשרת לקבל דיאגרמה אחת מתוך האחרת.

**דוגמא 4.3:** התרשים הבא הוא דיאגרמת בודה אסימפטוטית עבור  $20\log_{10}|G(j\omega)|$  כנגד

$\log_{10}\omega$  עבור מערכת מסוימת בפאזה מינימלית. כמו כן נתון שבתדר הברך ( $\omega = 10$ ) קיים

$|G(j\omega)| = \frac{5}{8}$ . מצא את פונקציית התמסורת של המערכת, אם ידוע שקבוע ההגבר  $K$  חיובי.



השיפוע של  $-20 \frac{dB}{dec}$  ב-  $\omega \rightarrow 0$  מעיד על קיומו של קוטב בראשית. ירידת השיפוע מ-  $-20$  dB ל-

$-60$  dB ב-  $\omega = 10$  מעידה ש-  $\omega = 10$  היא תדירות ברך עבור זוג קטבים, או עבור קוטב מסדר שני.

נוכל לרשום:

$$G(j\omega) = \frac{K}{j\omega \left[ 1 + \frac{2j\xi\omega}{10} - \left(\frac{\omega}{10}\right)^2 \right]}$$

כאשר  $\xi$  עשוי לקבל ערכים המתאימים הן לקוטב מסדר שני והן לזוג קטבים מרוכבים.

$$G(j10) = \frac{K}{j10[1 + 2j\xi - 1]} = \frac{K}{j10[2j\xi]} = -\frac{K}{20\xi}$$

נתון:

$$|G(j10)| = \frac{|K|}{20\xi} = \frac{5}{8}$$

בתדירות הברך, הערך האסימפטוטי הוא:

$$|G_A(j10)| = \left| \frac{K}{j10} \right| = \frac{|K|}{10} = 1 \quad (0 \text{ dB})$$

מכאן  $|K| = 10$  ו-  $\xi = 0.8$ .

$\xi = 0.8$  גורר קיומם של זוג קטבים מרוכבים.

מכיוון שקבוע ההגבר חיובי (נתון)  $K = |K| = 10$ .  
נוכל עתה לרשום:

$$G(j\omega) = \frac{10}{j\omega \left[ 1 + 0.16j\omega - \left(\frac{\omega}{10}\right)^2 \right]}$$

: 1

$$G(s) = \frac{10}{s \left[ 1 + 0.16s + \left(\frac{s}{10}\right)^2 \right]}$$

(5) כאשר נתונות לנו דיאגרמות בודה של פונקצית תמסורת בחוג פתוח GH של מערכת מסוימת

בפאזה מינימלית, נוכל למצוא מידית מתוך הדיאגרמות אם המערכת בחוג הסגור,  $\frac{G}{1+GH}$ , יציבה.

לשם כך נתבונן בדיאגרמת הפאזה. אם הפאזה אינה יורדת מתחת ל- $\pi$  המערכת בחוג הסגור תהיה יציבה. אם הפאזה שווה ל- $\pi$  בתדר  $\omega^*$  קיימות שתי אפשרויות:

$$20 \log_{10} |G(j\omega^*)| < 0 \text{ dB}$$

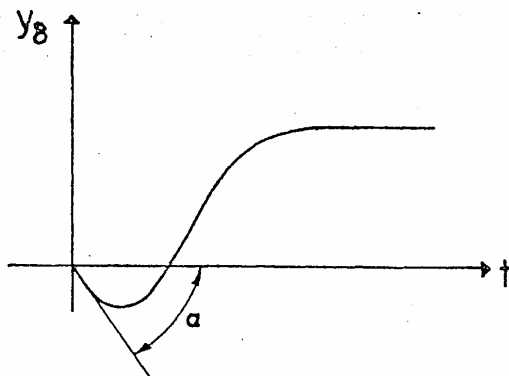
$$20 \log_{10} |G(j\omega^*)| \geq 0 \text{ dB}$$

הערה: יתכן כי במקרים מסוימים שזווית הפאזה של החוג הפתוח תהיה שווה ל- $\pi$  במספר נקודות תדר  $\omega_1 < \dots < \omega_k$ . במקרה זה יש לבדוק בזהירות מהי התנהגות שני הגרפים של בודה ולא ניתן להסיק מסקנה חד משמעית בקשר ליציבות המערכת ע"י בדיקת ההגבר ב- $\omega_1$  למשל (ניתן לבחון ע"י קריטריוני יציבות אחרים).

## 4.2. דוגמאות שונות

לסכום הפרק נפתור מספר דוגמאות נוספות.

**דוגמא 4.4:** הציור שלמטה מתאר את תגובת האימפולס של מערכת מסוימת. ידוע שלמערכת אפס אחד בלבד. מצא כמה קטבים למערכת ומה מיקומם; הוכח שהאפס נמצא בחלקו הימני של מישור s.



$$\text{אם } \lim_{s \rightarrow \infty} G(s) = \frac{k}{s^p}, \text{ קבע מהם } k, p$$

(תנאי התחלה אפס)

פונקציית התמסורת  $G(s)$  ניתנת לרישום באופן הבא :

$$G(s) = \frac{A(s+b)}{(s+a_1) \cdots (s+a_n)}$$

$A$  הוא קבוע,  $s = -b$  הוא האפס ו- $s = -a_i$  הם הקטבים של המערכת.

פונקציית התמסורת היא התמרת לפלס של התגובה להלם :  
כמו כן

$$G(s) = L\{y_\delta(t)\}$$

$$L\{y'_\delta(t)\} = sG(s) - y_\delta(0) = sG(s)$$

נתבונן ב-  $y_\delta(t)$ . קל להוכיח בנכונות העובדות הבאות :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_\delta(t) = \text{const} > 0$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y'_\delta(t) = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} y_\delta(t) = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} y'_\delta(t) = -\text{tg}\alpha$$

נפעיל עתה את משפטי הערך הסופי וההתחלתי :

$$0 = \lim_{t \rightarrow 0} y_\delta(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sG(s) = \frac{As^2}{s^n}$$

מכאן נובע שמספר הקטבים,  $n$ , גדול מ-2.

$$-\text{tg}\alpha = \lim_{t \rightarrow 0} y'_\delta(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s^2 G(s) = \frac{As^3}{s^n}$$

מכאן נובע  $n=3$ . כמו כן  $A = -\text{tg}\alpha$ , ולכן :

$$G(s) = \frac{-\text{tg}\alpha(s+b)}{(s+a_1)(s+a_2)(s+a_3)}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_\delta(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{-s \cdot \text{tg}\alpha(s+b)}{(s+a_1)(s+a_2)(s+a_3)} = \text{const} > 0$$

מתנאי זה נובע שאחד הקטבים בראשית:  $a_3=0$ . מכיוון שהתגובה להלם חסומה ואינה

"מתנדנדת" חייבים  $a_1, a_2$  להיות ממשיים וגדולים מאפס.

עתה :

$$\lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{-\text{tg}\alpha(s+b)}{(s+a_1)(s+a_2)} = \frac{-b \cdot \text{tg}\alpha}{a_1 a_2} > 0$$

מכאן נובע  $b < 0$ .

נסכם את מסקנותינו :

$$G(s) = \frac{-\text{tg}\alpha(s+b)}{s(s+a_1)(s+a_2)}$$

$b < 0$  ולכן האפס נמצא בחלקו הימני של מישור  $s$ .

למערכת קוטב אחד בראשית ושני קטבים בחלקו השמאלי של מישור s.

$$\lim_{s \rightarrow \infty} G(s) = \frac{-tg\alpha}{s^2} = \frac{k}{s^p}$$

ומכאן  $p = 2, k = -tg\alpha$ .

**דוגמא 4.5:** התגובה להלם של מערכת מסוימת היא:

$$y_d(t) = [e^{-t} + 10e^{-100t}] \delta_{-1}(t)$$

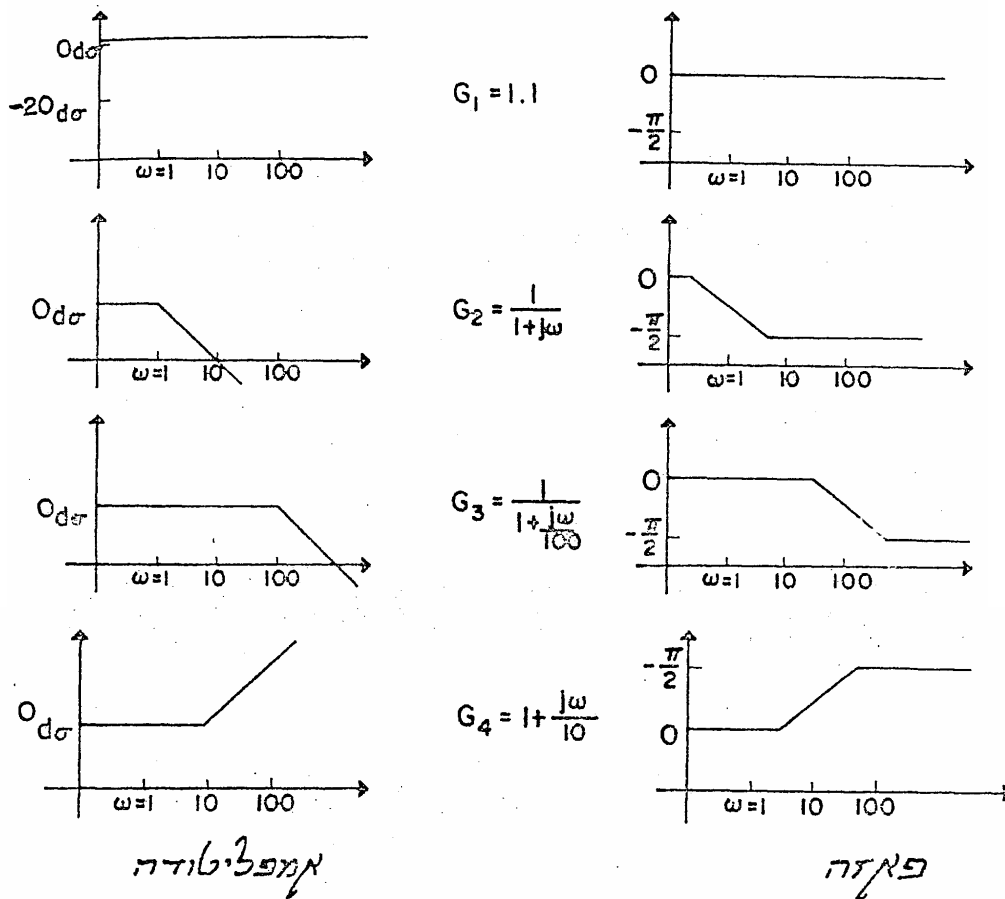
שרטט את עקומי בודה האסימפטוטים עבור המערכת.

$$G(s) = L\{y_d(t)\} = \frac{1}{s+1} + \frac{10}{s+100} = \frac{(s+100) + 10(s+1)}{(s+1)(s+100)}$$

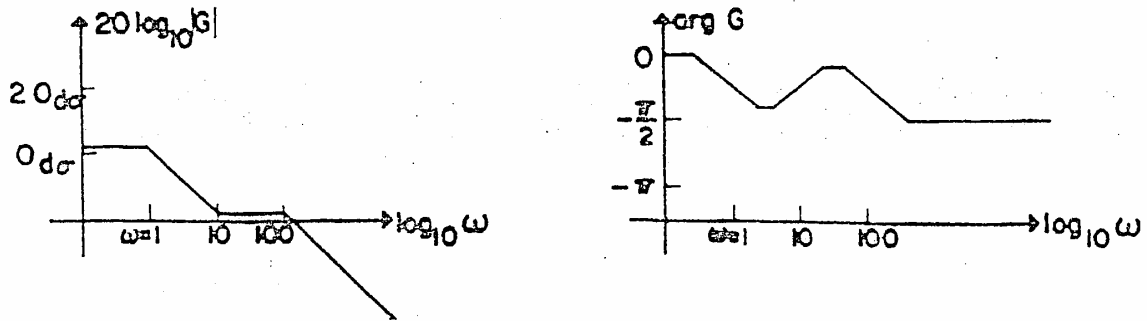
$$= \frac{11s+110}{(s+1)(s+100)} = \frac{11(s+10)}{(s+1)(s+100)}$$

$$G(j\omega) = \frac{1.1 \left(1 + \frac{j\omega}{10}\right)}{(1+j\omega) \left(1 + \frac{j\omega}{100}\right)}$$

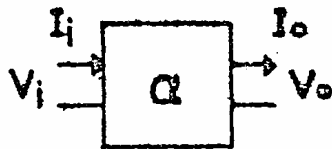
נשרטט את עקומי בודה עבור הפונקציות היסודיות המרכיבות את  $G(j\omega)$ :



עקומות בודה עבור  $G(j\omega)$  הן הסכום של עקומות בודה הנ"ל.

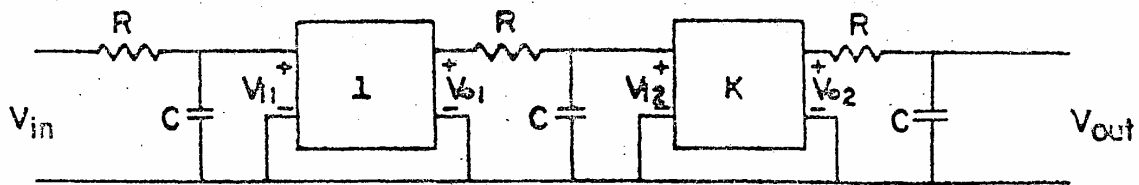


**דוגמא 4.6:** צייר דיאגרמות בודה אסימפטוטיות עבור המערכת המתוארת בתרשים. העירור הוא מתח הכניסה והתגובה היא מתח המוצא. מוסיפים למערכת מסלול משוב שלילי עם הגבר 1. עבור אילו ערכי K תהיה המערכת בחוג הסגור לא יציבה?



(הרכיב המתואר בתרשים ע"י הסמול:

הוא מגבר מתח אידיאלי:  $V_0 = \alpha V_i$ ,  $I_i = 0$ .)



נחשב את פונקציית התמסורת:

$$\frac{V_{i_1}(s)}{V_{in}(s)} = \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{1}{sRC + 1}$$

(המגבר לא צורך זרם - הוא אינו מעמיס את המעגל).

$$\frac{V_{o_1}(s)}{V_{i_1}(s)} = 1$$

$$\frac{V_{i_2}(s)}{V_{o_1}(s)} = \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{1}{sRC + 1}$$

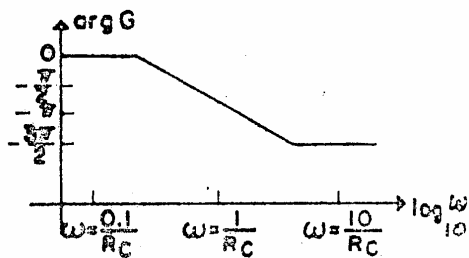
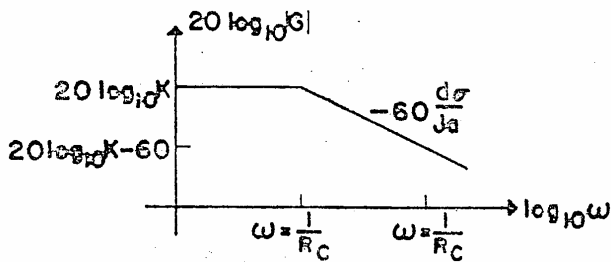
$$\frac{V_{o_2}(s)}{V_{i_2}(s)} = K$$

$$\frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)} = \frac{1}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{1}{sRC + 1}$$

$$G(s) = \frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)} = \frac{K}{(sRC + 1)^3}$$

$$G(j\omega) = \frac{K}{(1 + j\omega RC)^3}$$

דיאגרמות בודה המתאימות הן:



(אנו מניחים  $K > 0$ ).

המערכת שתוארה עד כה היא מערכת בחוג פתוח; כאשר סוגרים את החוג עם משוב שלילי בהגבר

1, נקבל פונקציית תמסורת בחוג סגור  $P(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)}$ . נשתמש בשיטה הבאה כדי לקבוע עבור

אילו ערכי  $K$  תהיה המערכת בחוג הסגור לא יציבה:

נבדוק עבור איזה  $\omega'$ ,  $\arg G(j\omega') = -\pi$ ,

$$\arg G(j\omega) = -3 \tan^{-1} \omega RC$$

$$\arg G(j\omega') = -3 \tan^{-1} \omega' RC = -\pi$$

$$\Rightarrow \tan^{-1} \omega' RC = \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \omega' RC = \sqrt{3} \Rightarrow \omega' = \frac{\sqrt{3}}{RC}$$

נבדוק מה ערכו של  $|G(j\omega)|$  ב-  $\omega = \omega'$ :

$$|G(j\omega)| = \frac{K}{[1 + (\omega' RC)^2]^{3/2}} = \frac{K}{[1 + 3]^{3/2}} = \frac{K}{8}$$

עבור  $|G(j\omega')| \geq 1$   $K \geq 8$ , והמערכת בחוג הסגור לא יציבה.

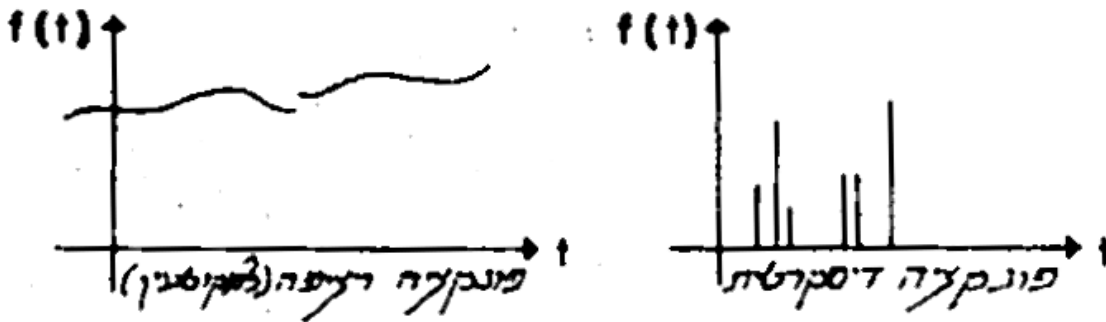




## 5. מערכות דיסקרטיות

### 5.1 מבוא

"פונקציה דיסקרטית בזמן" היא פונקציה אשר ערכה מוגדר רק עבור ערכים דיסקרטים (בדידים) של זמן. בפרק זה נטפל במערכות אשר אותות הכניסה והיציאה שלהן הם פונקציות דיסקרטיות בזמן. למערכות כאלה נקרא מערכות דיסקרטיות בזמן, או בקצור מערכות דיסקרטיות.



פונקציות זמן, כלומר פונקציות המוגדרות לכל  $t$ , ניתנות לייצוג ע"י פונקציות דיסקרטיות באמצעות תהליך של דגימה: עבור ערכים בדידים מסוימים של זמן תקבל הפונקציה הדיסקרטית את ערכה של פונקצית הזמן. (בכל שאר ערכי הזמן ערכה של הפונקציה הדיסקרטית בלתי מוגדר). ע"י דגימה "צפופה" יותר ויותר, הייצוג של פונקצית הזמן ע"י הפונקציה הדיסקרטית יהיה שלם יותר. אנו נגביל את עצמנו לדיון בדגימה ברווחי זמן שווים: ההפרש בין כל שני ערכי זמן עוקבים בהם הפונקציה הדיסקרטית מוגדרת יהיה קבוע.

**דוגמא 5.1:** מצא פונקציות דיסקרטיות המייצגות את פונקציות הזמן הבאות ע"י דגימה ברווחי זמן קבועים.

א.  $f(t) = at^2 + bt + c$  (דגימה ברווחי זמן של  $T = 2$  sec).

$$f(nT) = a(nT)^2 + b(nT) + c$$

עבור  $T = 2$  sec מייצגת הפונקציה הדיסקרטית  $f_s(n)$  את  $f(t)$  (שלם  $n$ ):

$$f_s(n) = 4an^2 + 2bn + c$$

$f_s(n)$  היא סדרה, המקבלת ערכים עבור  $n$ -ים שלמים.

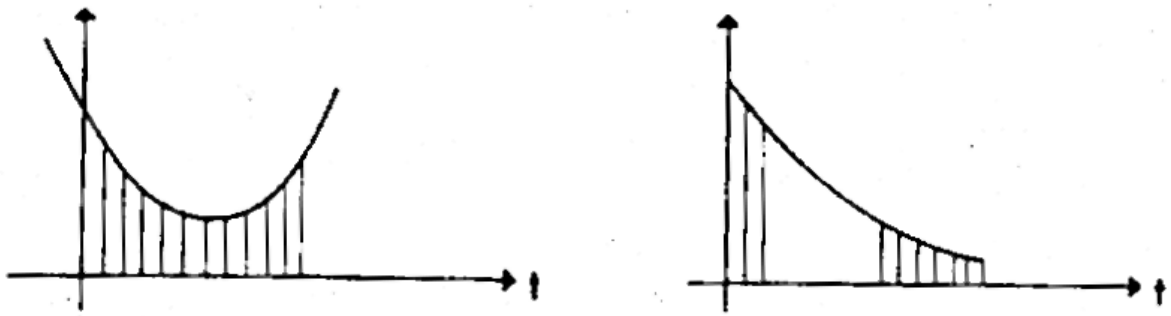
ב.

$$f(t) = \begin{cases} e^{-\frac{t}{100}} & 0 \leq t \leq 100 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

(דגימה ברווחי זמן של  $T = 1$  sec)

$$f(nT) = \begin{cases} e^{-\frac{nT}{100}} & 0 \leq nT \leq 100 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

עבור  $T = 1 \text{ sec}$  תייצג הפונקציה הדיסקרטית  $f(n)$  את  $f(t)$  (n שלם):



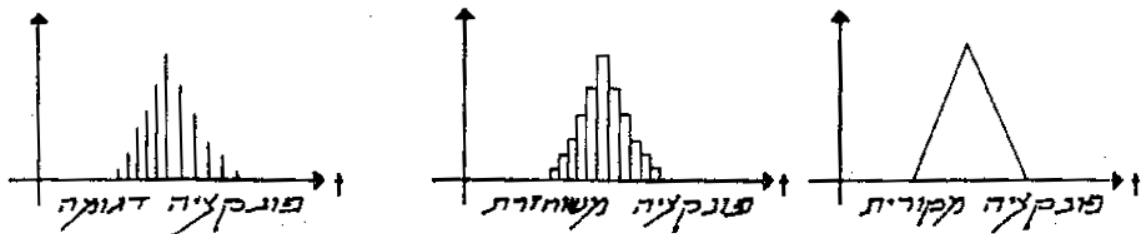
$$f_s(n) = \begin{cases} e^{-\frac{n}{100}} & 0 \leq n \leq 100 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

שוב,  $f_s(n)$  היא סדרה המקבלת ערכים עבור n-ים שלמים.

מתוך פונקציה דיסקרטית הנתונה לנו ניתן לבנות פונקציות זמן רציפה למקוטעין בתהליך הקרוי **שחזור**:

$$f(t, nT \leq t < (n+1)T) = f_s(n)$$

תהליך זה "הפוך" לתהליך הדגימה.



אם נבצע דגימה צפופה מאד של פונקציות זמן, ואחר כך נבצע על הפונקציה הדיסקרטית תהליך של שחזור, נקבל פונקציה שהיא קרוב טוב של פונקציות הזמן המקורית; הקרוב יהיה טוב יותר ככל שהדגימה תהיה צפופה יותר.

אותות רציפים (או רציפים למקוטעין) טבעיים למערכות פיסיקליות ובכל הפרקים הקודמים עסקנו בניתוח "רציף" של אותן מערכות. אולם, במקרים בהם דגימה היא חלק מהתהליך, טבעי לבצע ניתוח "דיסקרטי" של המערכות. נדגים עתה מספר סיטואציות שבהן ניתוח דיסקרטי הוא תהליך הניתוח הטבעי.

ממשלת רוריטניה הזמינה סקר מהלשכה המרכזית לסטטיסטיקה אודות הקשר בין יוקר המחיה ברוריטניה לבין גודל האוכלוסייה. לשם כך מודדת הלשכה פעם בחודש את "מדד יוקר המחיה", שהוא פונקציה דיסקרטית, ופעם בשנה את גודל האוכלוסייה (גם כאן מתקבלת פונקציה

דיסקרטית). אחרי שנים מספר יכולה הלשכה לבצע ניתוח (דיסקרטי) של הקשר בין שתי סדרות המספרים.

בשנים האחרונות מתרחב השימוש במחשבים ומעבדים ספרתיים לסימולציה של מערכות, או כחלק ממערכות; במחרטה מודרנית, למשל, "בקר ספרתי" הוא חלק ממסלול משוב. במקרים אלו האותות הם בדרך כלל "פונקציות משוחזרות", והניתוח הטבעי הוא ניתוח דיסקרטי.

המודיעין הרורטיני מעונין להתחקות אחר הפעילות בכור אטומי הנמצא במדינת ליליפוט השכנה. לשם כך משוגר לוין ריגול אשר מותקנים בו שלושה מכשירי מדידה: לעצמת קרינת  $\alpha$ , לעצמת קרינת  $\beta$  ולעצמת קרינת  $\gamma$ ; בשל בעיות של עודף משקל מותקן בלוין משדר אחד בלבד להעברת הנתונים לרורטיניה. בשניה ה-n משדר הלוין את עצמת קרינת  $\alpha$  כפי שהיתה רגע קודם לכן, בשניה ה-n+1 את עצמת קרינת  $\beta$  ובשניה ה-n+2 את עצמת קרינת  $\gamma$ . התהליך מחזורי: בשניה ה-n+3 שוב משודרת אינפורמציה אודות קרינת  $\alpha$ . במלים אחרות, בלוין התבצע תהליך של דגימה. ניתוח התוצאות בתחנת הקליטה יהיה ניתוח (דיסקרטי) של 3 סדרות המספרים שנתקבלו.

בדוגמאות שהבאנו זה עתה התהליך המתבצע למעשה הוא דגימה של פונקציות זמן, ניתוח של האותות הדיסקרטיים שנתקבלו ואחר כך ביצוע שחזור כדי לקבל שוב פונקציות המוגדרות לערכי t רציפים.

מערכת דיסקרטית היא מערכת שאותות הכניסה (העירור)  $u(n)$  והיציאה (התגובה)  $y(n)$  שלה הן פונקציות דיסקרטיות. מערכת דיסקרטית יכולה להתקבל מדגימה של מערכת רציפה או להיות כך מעצם מהותה. מערכת דיסקרטית שמקרכת מערכת לינארית קבועה בזמן (ע"י דגימה או קרוב נגזרות ע"י הפרשים) תהיה מהצורה הבאה

$$(5.1) \quad a_0 y(n) + a_1 y(n-1) + \dots + a_N y(n-N) = b_0 u(n) + b_1 u(n-1) + \dots + b_L u(n-L)$$

נאמר על המשואה שהיא מסדר N (מתאים ל n הסדר של מד"ר) ובמקרה כזה יתקיים גם ש  $L \leq N$  (בגלל ה"פיזיקליות" של המערכת הרציפה או  $m \leq n$  במד"ר).

**הגדרות:** נאמר על מערכת דיסקרטית שהיא:

לינארית כאשר  $u_1(n) \rightarrow y_1(n)$  ו  $u_2(n) \rightarrow y_2(n)$  גורר

$$c_1 u_1(n) + c_2 u_2(n) \rightarrow c_1 y_1(n) + c_2 y_2(n) \text{ לכל } c_1, c_2 \text{ קבועים כלשהם.}$$

קבועה בזמן כאשר  $u(n) \rightarrow y(n)$  גורר  $u(n-n_0) \rightarrow y(n-n_0)$  ל  $n_0$  שלם כלשהו.

סיבתית אם  $y(n)$  תלוי רק בערכי  $u(m)$   $m \leq n$ .

לאות (סדרה) שמתחילה לקבל ערכים מ  $n_0$  מסויים ומעלה נקרא אות "סיבתית". הדיון בהמשך יוגבל בעיקרו למערכת דיסקרטית לינארית קבועה בזמן וסיבתית.

הכניסה תתחיל לפעול מרגע מסויים והלאה ז"א  $u(n)$  מקיים  $u(n) = 0, n < n_0$ .

כיוון שהמערכת סיבתית, התגובה  $y(n)$  לכניסה סיבתית גם היא סדרה סיבתית. בדרך כלל אפשר להניח ש  $n_0 = 0$  (אחרת אפשר לעשות shift של האינדקס של  $n$  ל  $n_0 = 0$  קודם לטיפול).

מערכת דיסקרטית לינארית קבועה בזמן וסיבתית נתנת לתאור ע"י משוואת הפרשים מהצורה (5.1) שנקראת משוואת הפרשים מסדר  $N$ . יש לה פתרון אחד ויחיד כאשר ידוע הערור  $u(n)$  ומצורפים אליה  $N$  ערכים ידועים של  $y(m)$ . בדרך כלל נניח משוואת הפרשים עם תנאי התחלה  $y(-N), y(-N+1), \dots, y(-1)$  שיקראו "תנאי התחלה סטנדרטיים"

$$(5.2) \quad \sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^L b_k u(n-k) \quad , \quad y(-N), y(-N+1), \dots, y(-1)$$

כאשר  $a_k, b_k$  קבועים. כמו כן נניח  $L \leq N$ . תנאי התחלה מקובלים אחרים הם התנאים  $y(0), y(1), \dots, y(N-1)$ .

ראשית נשים לב שאפשר לפתור את המערכת (4.2) באופן רקורסיבי

$$(5.3) \quad y(n) = -\frac{1}{a_0} \left( \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) - \sum_{k=0}^L b_k u(n-k) \right)$$

(לשים לב שזו אפשרות שאין לה מקבילה במערכת רציפה). הפתרון הרקורסיבי הוא נומרי במהותו. הוא מאפשר למצוא את  $y(n)$  צעד אחר צעד אך אינו מוליך בדרך"כ לביטוי סגור ל  $y(n)$ .

בהמשך נראה גישות לקבלת הפתרון אנליטי (דהינו נמצא ל  $y(n)$  ביטוי סגור). לשם כך נגדיר שתי פונקציות דיסקרטיות שימושיות לניתוח מערכות דיסקרטיות

$$(5.4) \quad \delta(n) = \delta_0(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

פונקציה זו קרויה פונקצית "הדלתא" או "הלם הדיסקרטי", ואת הפונקציה

$$(5.5) \quad \delta_{-1}(n) = \sum_{k=-\infty}^n \delta(k) = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

שתקרא פונקצית המדרגה (כל  $A\delta_{-1}(n)$  נקראת פ' מדרגה דיסקרטית; המקרה  $A=1$  יקרא מדרגת יחידה).

## 5.2 פתרון משוואות הפרשים

להלן נתאר גישה לפתרון משוואת הפרשים (5.2) שנקרא לה הגישה הסטנדרטית (בהמשך נראה גם דרכי פתרון חלופיות) הגישה הסטנדרטית מפרקת את הפתרון המבוקש ל (5.2),  $y(n)$ , לסכום של שני פתרונות

$$(5.6) \quad y(n) = y_h(n) + y_p(n)$$

היכן ש  $y_h(n)$  פותר את המשוואה ההומוגנית (צורת המשוואה עבור  $u(n) \equiv 0$ ) עם תנאי ההתחלה הסטנדרטיים הנתונים:

$$(5.7) \quad \sum_{k=0}^N a_k y_h(n-k) = 0 \quad ; \quad y_h(-N) = y(-N), \dots, y_h(-1) = y(-1)$$

ו  $y_p(n)$  פותר את המשוואה המלאה עם תנאי התחלה אפס עבור האילוץ הנתון:

$$(5.8) \quad \sum_{k=0}^N a_k y_p(n-k) = \sum_{k=0}^L b_k u(n-k) \quad ; \quad y_p(-N) = \dots = y_p(-1) = 0$$

ברור שהסכום של  $y_p(n)$  ו  $y_h(n)$  הוא פתרון של (5.2) (על פי תכונת הלינאריות) ולכן הינו הפתרון (על פי יחידות הפתרון).

### 5.2.1 פתרון המשוואה ההומוגנית

ננסה למצוא פתרון מהצורה  $y_h(n) = Cz^n$ . נציב את הפתרון במשוואה (4.7) ונקבל:

$$(5.9) \quad Cz^n \sum_{k=0}^N a_k z^{-k} = 0$$

ההתאפסות אפשרית כאשר  $Cz^n = 0$  שמציע את הפתרון  $y_h(n) \equiv 0$  (שלא יכול לקיים תנאי ההתחלה שאינם אפס) וכן באפסים  $\alpha_1, \dots, \alpha_N$  של הפולינום הבא

$$(5.10) \quad A(z) := \sum_{k=0}^N a_k z^{-k} = a_0 \prod_{k=1}^N (1 - \alpha_k z^{-1}) = a_0 z^{-N} \prod_{k=1}^N (z - \alpha_k)$$

ל  $A(z)$  נקרא **הפולינום האופייני** של המערכת. המשוואה  $z^N A(z) = 0$  נקראת **המשוואה האופיינית** של המערכת.

#### 5.2.1.1 נניח תחילה שלפולינום האופייני יש $N$ אפסים שונים $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ . במקרה זה כל אפס תורם

פתרון אפשרי  $C\alpha_k^n$  והפתרון לבעיה ההומוגנית הוא קומבינציה ליניארית מסוימת של פונקציות מהקבוצה  $\{\alpha_1^n, \dots, \alpha_N^n\}$  הקרויה "הקבוצה היסודית של הפתרונות למשוואה ההומוגנית",

$$(5.11) \quad y_h(n) = \sum_{k=1}^N C_k \alpha_k^n = C_1 \alpha_1^n + \dots + C_N \alpha_N^n$$

כזו שמקיימת את תנאי ההתחלה. דהינו נותר לקבוע את הנעלמים  $C_1, \dots, C_N$  ע"י פתרון מערכת של  $N$  המשוואות הבאות:

$$(5.12) \quad \begin{cases} y(-N) = C_1 \alpha_1^{-N} + \dots + C_N \alpha_N^{-N} \\ \vdots \\ y(-2) = C_1 \alpha_1^{-2} + \dots + C_N \alpha_N^{-2} \\ \vdots \\ y(-1) = C_1 \alpha_1^{-1} + \dots + C_N \alpha_N^{-1} \end{cases}$$

5.2.1.2. כאשר מופיע אפס של פולינום אופייני עם ריבוי, קבוצה היסודית של הפתרונות הבלתי תלויים משנה צורה. כל  $\alpha_k$  שמופיע בכפילות  $q_k$  תורם לפתרון קומבינציה ליניארית של  $q_k$  פתרונות

$$C_{k, q_k} \alpha_k^n + C_{k, q_k-1} n \alpha_k^n + C_{k, q_k-2} n^2 \alpha_k^n + \dots + C_{k, 1} n^{q_k-1} \alpha_k^n$$

יש לבצע הצבה כזו עבור כל אפס עם ריבוי ולבסוף למצוא את  $N$  המקדמים ע"י דרישה.

**דוגמא 5.2:** נתאר את הגישה הסטנדרטית לפתרון משוואת ההפרשים ע"י פתרון משוואת ההפרשים הבאה:

$$y(n) - \frac{1}{4} y(n-1) - \frac{1}{8} y(n-2) = 3u(n) + \frac{1}{16} u(n-1)$$

עבור תנאי התחלה  $y(-1) = 1, y(-2) = 0$  ועבור כניסה של מדרגת יחידה ( $u(n) = \delta_{-1}(n)$ )

לפי 5.2.1 נמצא את הפתרון לבעיה ההומוגנית.

הפולינום האופייני הוא  $A(z) = 1 - 0.25z^{-1} - 0.125z^{-2}$  והמשואה האופיינית היא  $z^2 - 0.25z - 0.125 = 0$  הפתרונות שלה (האפסים של הפולינום) הם  $\alpha_1 = 0.5$  ו  $\alpha_2 = -0.25$ ,

הקבוצה היסודית של הפתרונות לבעיה ההומוגנית היא  $\left(\frac{1}{2}\right)^n, \left(-\frac{1}{4}\right)^n$  והפתרון הינו

קומבינציה שלהן מהצורה

$$y_h(n) = C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^n + C_2 \left(-\frac{1}{4}\right)^n$$

שצריכה לקיים תנאי התחלה ב  $n=-1$  ו  $n=-2$ . הצבת ערכי ההתחלה מוליכה למערכת המשוואות

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 4 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ומפתרונה מקבלים  $C_1 = \frac{1}{3}, C_2 = -\frac{1}{12}$ . לכן הפתרון הוא:

$$y_h(n) = \begin{cases} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{1}{12} \left(-\frac{1}{4}\right)^n, & n \geq 0 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

לפעמים משתמשים בסימן של פ' המדרגה גם כדי לציין שהפתרון נתון עבור  $n \geq 0$ . לדוגמה את הנ"ל אפשר לכתב גם באופן הבא

$$y_h(n) = \left( \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{1}{12} \left(-\frac{1}{4}\right)^n \right) \delta_{-1}(n)$$

כאשר נתונה משוואה עם אגף ימני לא טריויאלי שיש לפתור עבור כניסה שאינה אפס זהותי עם תנאי התחלה  $y(0), y(1), \dots, y(N-1)$  ניתן "לגלגל" אותם אחורה לתנאי ההתחלה בצורה הסטנדרטית ולהמשיך עם מציאת הפתרון ההומוגני כמקודם.

אם לדוגמה תנאי ההתחלה בדוגמא 5.2: היו נתונים כ-  $y(1) = 4, y(0) = \frac{13}{4}$ . אז נציב  $n = 1$

$$y(1) - \frac{1}{4}y(0) - \frac{1}{8}y(-1) = 3u(1) + \frac{1}{16}u(0)$$

נציב כאן את  $y(0), y(1)$  ואת  $u(1) = 1, u(0) = 1$  ונקבל ש  $y(-1) = 1$ . עבור  $n = 0$ ,

$$y(0) - \frac{1}{4}y(-1) - \frac{1}{8}y(-2) = 3u(0) + \frac{1}{16}u(-1)$$

ונקבל ש  $y(-2) = 0$ . כעת אפשר להמשיך ולמצוא את  $y_h(n)$  כמקודם.

### 5.2.2. פתרון המשוואה עם הערור

נחלק את מציאת הפתרון  $y_p(n)$  ל (5.8) לשלושה תת-שלבים.

5.2.2.1. נתחיל במציאת התגובה של (4.2) להלם  $u(n) = \delta(n)$  עם תנאי התחלה (סטנדרטיים)

של אפס.  $y_\delta(n)$  הוא גם התגובה של (4.8) עבור  $u(n) = \delta(n)$ , דהינו

$$(5.13) \quad \sum_{k=0}^N a_k y_\delta(n-k) = \delta(n) \quad ; \quad y_\delta(-N) = \dots = y_\delta(-1) = 0$$

נציב  $n = 0$  לקבל  $a_0 y_\delta(0) = \delta(0) = 1$  לכן  $y_\delta(n)$  הוא גם הפתרון של המשוואה ההומוגנית

עם תנאי התחלה כדלקמן

$$(5.14) \quad \sum_{k=0}^N a_k y_\delta(n-k) = 0 \quad ; \quad y_\delta(-N+1) = \dots = y_\delta(1) = 0, \quad y_\delta(0) = \frac{1}{a_0}$$

שאותה אנו כבר יודעים לפתור (ראה 5.2.1).

5.2.2.2. נמצא את הפתרון לבעיה הבאה

$$(5.15) \quad \sum_{k=0}^N a_k y_f(n-k) = f(n) \quad ; \quad y_f(-N) = \dots = y_f(-1) = 0$$

כאשר  $f(n)$  פונקציה דיסקרטית כלשהי (בהמשך נניח שהיא סדרה "סיבתית"). נשים לב

שניתן עקרונית לכתב כל  $f(n)$  באופן  $f(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m)\delta(n-m)$  (ניצול הגדרת פ' הדלתא).

לכן אם כניסה  $\delta(n)$  מפיקה  $y_\delta(n)$  (אותה מצאנו ב 5.2.2.1), אז  $\delta(n) \rightarrow y_\delta(n)$ , או  $\delta(n-m) \rightarrow y_\delta(n-m)$  (כי המערכת קבועה בזמן) וקומבינציות של כניסה עוברות לקומבינציות תואמות של היציאה (כי המערכת לינארית)

$$f(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m)\delta(n-m) \rightarrow \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m)y_\delta(n-m) = y_f(n)$$

**הגדרה: קונבולוציה** (דיסקרטית) ביו שתי סדרות  $x_1(n)$ ,  $x_2(n)$  תסומן ע"י  $x_1(n) * x_2(n)$  ומגדירים אותה ע"י

$$(5.16) \quad x_1(n) * x_2(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m)x_2(n-m)$$

נובע מחילוף סדר הסכימה שהקונבולוציה לא תלויה בסדר הופעת הסדרות

$$x(n) = x_1(n) * x_2(n) = x_2(n) * x_1(n)$$

אם, למשל,  $x_1(n)$  סדרה סיבתית נקבל שאחד מגבולות הסיכום סופיים

$$x(n) = \sum_{m=0}^{\infty} x_1(m)x_2(n-m) = \sum_{m=-\infty}^n x_1(n-m)x_2(m)$$

במקרים מעשיים רבים שתי הסדרות סיבתיות והסכימה הדרושה למציאת כל ערך של  $x(n)$  סופית ונתונה ע"י

$$x(n) = \sum_{m=0}^n x_1(m)x_2(n-m) = \sum_{m=0}^n x_1(n-m)x_2(m)$$

נשתמש בהמשך גם בסימון  $x = x_1 * x_2$  שמאפשר גם לכתב את  $x(n)$  כ  $(x_1 * x_2)(n)$  קיבלנו לכן שהפתרון ל (5.15) הוא

$$(5.17) \quad y_f(n) = f(n) * y_\delta(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m)y_\delta(n-m)$$

5.2.2.3. לאחר שמצאנו את הפתרון ל (5.15) מוצאים את הפתרון המבוקש ל (5.8) באופן

$$(5.18) \quad y_p(n) = \sum_{k=0}^L b_k y_f(n-k)$$

הביטוי (5.18) מתקבל מהשוואת המשוואות (5.15) עם (5.6) ושימוש בתכונות של מערכת לינארית וקבועה בזמן.

**דוגמא 5.2: (המשך):** נמשיך את הדוגמה עד להשלמת הפתרון לבעיה הנתונה.



נמצא את התגובה להלם ע"י מציאת קומבינציה של בסיס הפתרונות  $\left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^n, \left(-\frac{1}{4}\right)^n \right\}$

התחלה  $y_\delta(n) = A_1 \left(\frac{1}{2}\right)^n + A_2 \left(-\frac{1}{4}\right)^n$  שפותר את בעיית העזר ההומוגנית (5.14) עם תנאי התחלה

מקבלים  $y_\delta(0) = \frac{1}{a_0} = 1, y(-1) = 0$  .  $y_\delta(n) = \left(\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{4}\right)^n\right) \delta_{-1}(n)$  (עד כאן

(5.2.2.1).

כיוון שהכניסה הנתונה היא מדרגה  $u(n) = \delta_{-1}(n)$ , נשתמש בקונבולוציה (5.17) למצוא את

$$y_{\delta_{-1}}(n) = y_\delta(n) * \delta_{-1}(n) = \sum_{m=0}^n y_\delta(m) \delta_{-1}(n-m) = \sum_{m=0}^n y_\delta(m) = \sum_{m=0}^n \left( \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^m + \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{4}\right)^m \right) =$$

$$= \frac{2}{3} \left( \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} \right) + \frac{1}{3} \left( \frac{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1 + \frac{1}{4}} \right) = \frac{1}{3} \left\{ \frac{24}{5} - 2 \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{5} \left(-\frac{1}{4}\right)^n \right\} \delta_{-1}(n)$$

(עד כאן 5.2.2.2).

ניתן עתה למצוא את  $y_p(n)$  לפי (5.18). ראשית נשים לב ש

$$y_{\delta_{-1}}(n-1) = \frac{1}{3} \left\{ \frac{24}{5} - 2 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{1}{5} \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1} \right\} \delta_{-1}(n-1) = \left\{ \frac{8}{5} - \frac{4}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{4}{15} \left(-\frac{1}{4}\right)^n \right\} \delta_{-1}(n)$$

ולכן

$$y_p(n) = 3y_{\delta_{-1}}(n) + \frac{1}{16} y_{\delta_{-1}}(n-1) = \left\{ \frac{49}{10} - \frac{25}{12} \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{11}{60} \left(-\frac{1}{4}\right)^n \right\} \delta_{-1}(n)$$

הפתרון לדוגמה מתקבל ע"י הוספת הני"ל לפתרון ההומוגני

$$y(n) = y_p(n) + y_h(n) = \left\{ \frac{49}{10} - \frac{7}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{10} \left(-\frac{1}{4}\right)^n \right\} \delta_{-1}(n)$$

אפשר לאשש אם הפתרון האנליטי נותן אברים ראשונים זהים לפתרון הרקורסיבי. אם נציב

בדוגמה צעד אחר צעד  $n = 0, 1, 2, \dots$  נקבל

$$y(0) = \frac{13}{4}, y(1) = 4, y(2) = \frac{143}{32}, \dots$$

אותם ערכים שמתקבלים גם בהצבה לפתרון הסגור שמצאנו.

אפיון חשוב של המערכת (5.2) הוא פונקציית התגובה שלה להלם שניחד לה את הסימון  $h(n)$  ונגדיר אותה כפתרון של (5.2) לכניסה  $u(n) = \delta(n)$  עבור תנאי התחלה של אפס.  $h(n)$  הוא לכן הפתרון ל

$$(5.19) \quad \sum_{k=0}^N a_k h(n-k) = \sum_{k=0}^L b_k \delta(n-k) \quad ; \quad h(-N) = \dots = h(-1) = 0$$

מהשוואה עם (5.9) ותכונות המערכת מקבלים כי

$$(5.20) \quad h(n) = \sum_{k=0}^L b_k y_\delta(n-k)$$

נראה מכאן שאפשר לבטא את  $y_p(n)$ , התגובה של המערכת עם תנאי התחלה אפס וכניסה כלשהי  $u(n) = f(n)$  (הפתרון ל (5.8)), ע"י קונבולוציה של  $f(n)$  עם התגובה להלם. נציב ל (5.18) את (5.17)

$$y_p(n) = \sum_{k=0}^L b_k y_f(n-k) = \sum_{k=0}^L b_k \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m) y_\delta(n-k-m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m) h(n-m)$$

לכן

$$(5.21) \quad y_p(n) = f(n) * h(n)$$

אם המערכת היא סיבתית, התגובה להלם ב  $n = 0$  מחייב ש  $h(n) = 0$  עבור  $n < 0$ . ז"א תגובת ההלם היא סדרה "סיבתית". במקרה כזה

$$y_p(n) = \sum_{m=0}^{\infty} f(n-m)h(m) = \sum_{m=-\infty}^n f(m)h(n-m)$$

בדר"כ הכניסה מופעלת מרגע מסוים והלאה,  $f(n) = 0, n < n_0$ , ז"א גם הערור הוא סדרה סיבתית ולכן

$$y_p(n) = \sum_{m=0}^{n-n_0} f(n-m)h(m) = \sum_{m=n_0}^n f(m)h(n-m)$$

אם יודעים את  $h(n)$  (למשל כאשר ידועה פי התמסורת שנכיר בהמשך) הקונבולוציה הנ"ל מאפשר דרך נוספת למצא את הפתרון ל (5.8).

5.2.4. יציבות של המערכת

**הגדרה:** מערכת מוגדרת כיציבה אם כל כניסה חסומה עוברת ליציאה חסומה. דהינו  
 $0 \leq B_1, B_2 < \infty$ , היכן ש  $|f(n)| < B_1, \forall n \Rightarrow |y(n)| < B_2$ .

**טענה:** מערכת לינארית דיסקרטית יציבה אם ורק אם תגובת ההלם שלה מקימת  
 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$  (absolutely summable  $h(n)$ ).

**הוכחה:** אם  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$  מתקיים אז כיוון ש  $y = h * f$

$$|y(n)| = \left| \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(n-m)h(m) \right| \leq \sum_{m=-\infty}^{\infty} |f(n-m)| |h(m)| \leq B_1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$$

כדי להראות שהתנאי גם הכרחי נראה שאי קיום  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$  מאפשר יציאה לא חסומה

לכניסה חסומה. נניח  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| = \infty$  אז אפשר לבחור עבורו את הכניסה הבאה

$$f(n) = \begin{cases} 0 & h(-n) = 0 \\ \frac{h(-n)}{|h(-n)|} & h(-n) \neq 0 \end{cases}$$

שהיא כניסה חסומה לכל  $n$  (עייני  $B_1 = 1$ ) שעבורה

$$y(0) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)f(-m) = \sum_{m, h(m) \neq 0} h(m)f(-m) = \sum_{m, h(m) \neq 0} h(m) \frac{h(m)}{|h(m)|} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| = \infty$$

(מש"ל).

**מסקנה:** מערכת לינארית דיסקרטית קבועה בזמן וסיבתית יציבה אם ורק אם כל האפסים של הפולינום האופייני  $A(z)$  קטנים בערך מוחלט מאחד. דהינו

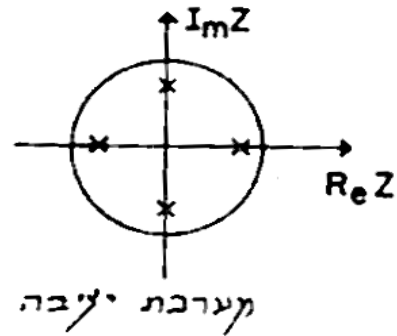
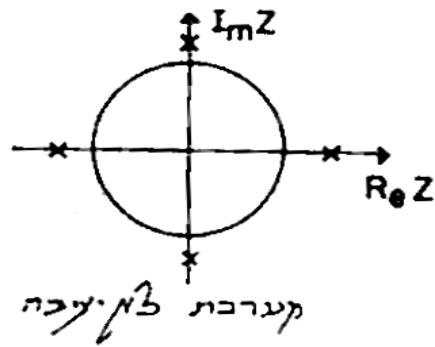
$$(5.22) \quad |\alpha_k| < 1, k = 1, \dots, N$$

**הוכחה:** ראינו ש  $h(n)$  בנוי מקומבינציות לינאריות של הפתרונות היסודיים  $\alpha_k^n$  (בהשתתפות ביטויים  $n^i \alpha_k^n, i = 0, \dots, q_k - 1$  במקרה של אפס בכפילות  $q_k$ ). אם המערכת סיבתית  $n \geq 0$

התנאי (5.16) מספיק ליציבות כי הוא גורר  $\sum_{n=0}^{\infty} |h(n)| < \infty$ . התנאי הוא גם הכרחי כי די שאחד

האפסים יהיה עם ערך מוחלט גדול מאחד כדי שתנאי ההתכנסות הנ"ל לא יתקיים.

אם משרטטים מפת אפסים של הפולינום האופייני, התנאי ליציבות המערכת הוא שכל האפסים של הפולינום ימצאו בתוך מעגל היחידה שמרכזו בראשית המישור הקומפלכסי.



נמשיך עם מספר דוגמאות נוספות של משוואות הפרשים שאפשר לפתור עם רק חלק מהכלים של הגישה הסטנדרטית או בדרכים חילופיות

**דוגמא 5.3:** כדי לחקור את תפוצת הארנבות, בנו מודל המבוסס על ההנחות הבאות:

- זוג ארנבות מעמיד זוג ולדות אחד, זכר ונקבה, כל שנה.
- שנה עוברת מרגע לידת הולדות, עד לרגע שהם עצמם מעמידים ולדות.
- אורך חיי ארנבת הוא שלוש שנים.

נסמן ב- $y(n)$  את מספר הזוגות הארנבות בתחילת השנה ה- $n$ . אם  $y(0)=2$ ,  $y(1)=1$ ,  $y(2)=4$ , מצא את  $y(n)$  לכל  $n$ .

מספר זוגות הארנבות שנתווספו בשנה ה- $n-1$  הוא  $y(n) - y(n-1)$  והוא שווה ל- $y(n-2) - y(n-3)$ , מספר זוגות הארנבות שהעמידו ולדות פחות מספר זוגות הארנבות שהלכו לעולמן.

הבעיה מיוצגת ע"י משוואת הפרשים:

$$y(n) - y(n-1) - y(n-2) + y(n-3) = 0$$

בצרוף תנאי ההתחלה  $y(0) = 2, y(1) = 1, y(2) = 4$ .

המשוואה האופיינית היא  $z^3 - z^2 - z + 1 = 0$  ושורשיה הם  $\alpha_1 = 1$  בכפילות 2 ו- $\alpha_2 = -1$ .

הקבוצה היסודית היא:  $\{1, n, (-1)^n\}$  והפתרון יכול להכתב בצורה:

$$y(n) = C_{1,2} + C_{1,1}n + C_2(-1)^n$$

נמצא את המקדמים:

$$\begin{cases} y(0) = C_{1,2} + C_2 = 2 \\ y(1) = C_{1,2} + C_{1,1} - C_2 = 1 \\ y(2) = C_{1,2} + 2C_{1,1} + C_2 = 4 \end{cases}$$

מפתרון המערכת מקבלים והפתרון לבעיה הוא:

$$y(n) = [1 + n + (-1)^n] \delta_{-1}(n)$$

בדוגמה הנ"ל הבעיה במלואה היא מהצורה של בעיה הומוגנית וכן תנאי ההתחלה נתונים על סדרת אינדקסים חיוביים. לכן אפשר למצוא את מקדמי הקומבינציה של הפתרונות היסודיים ישירות ע"י הצבת תנאי ההתחלה הנתונים (מיותר לגלגל אותם אחורה).

#### דוגמא 5.4: פתור את הבעיה

$$y(n) - 4y(n-1) + 4y(n-2) = 0$$

$$y(0) = 1; y(1) = 3$$

הפולינום האופייני הוא  $z^2 - 4z + 4$ , יש לו אפס ב  $\alpha = 2$ , בכפילות  $q = 2$ .

הקבוצה היסודית של הפתרונות למשוואה היא  $\{2^n, n2^n\}$  והפתרון הוא מהצורה:

$$y(n) = A_1 2^n + A_2 n 2^n$$

מערכת המשוואות למציאת המקדמים היא:

$$\begin{cases} y(0) = A_1 \cdot 2^0 + A_2 \cdot 0 \cdot 2^0 = 1 \\ y(1) = A_1 \cdot 2^1 + A_2 \cdot 1 \cdot 2^1 = 3 \end{cases}$$

מקבלים  $A_1 = 1; A_2 = \frac{1}{2}$  והפתרון הוא:

$$y(n) = \left[ 2^n + \frac{1}{2} n 2^n \right] \delta_{-1}(n)$$

#### דוגמא 5.5: פתור את הבעיה הבאה בהנחה של תנאי התחלה אפס

$$y(n) - 5y(n-1) + 6y(n-2) = \delta(n)$$

המשוואה האופיינית היא  $z^2 - 5z + 6 = 0$  השרשים הם  $\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3$  ולמעשה יש למצוא את

$y_\delta(n)$  כמתאר בשלב (2) (שבמקרה זה הינו גם  $h(n)$  התגובה להלם של המערכת הנתונה). הוא

נתון ע"י לקומבינציה של הפתרונות היסודיים  $y_\delta(n) = A_1 \cdot 2^n + A_2 \cdot 3^n$  שמקדמיו נקבעים ע"י

תנאי ההתחלה  $y_\delta(0) = 1; y_\delta(-1) = 0$ . מתקבלת מערכת משוואות עבור המקדמים:

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 1 \\ \frac{1}{2} A_1 + \frac{1}{3} A_2 = 0 \end{cases}$$

הפתרון למערכת הוא  $A_1 = -2; A_2 = 3$  ולכן  $y_\delta(n) = (-2 \cdot 2^n + 3 \cdot 3^n) \delta_{-1}(n)$

#### דוגמא 5.6: פתור את המשוואה הבאה בתנאי התחלה אפס.

$$y(n) - 5y(n-1) + 6y(n-2) = 2\delta_{-1}(n)$$

$$y(-1) = 0; y(-2) = 0$$

בדוגמא 5.5: כבר מצאנו את התגובה  $y_\delta(k)$ , למשוואה זו. הפתרון לבעיה הנוכחית הוא (ראה

(5.2.2

$$y(n) = 2y_\delta(n) * \delta_{-1}(n) = 2 \sum_{m=0}^n y_\delta(m) \delta_{-1}(n-m) = 2 \sum_{m=0}^n (-2 \cdot 2^m + 3 \cdot 3^m) =$$

$$= -4 \sum_{m=0}^n 2^m + 6 \sum_{m=0}^n 3^m = -4(2^{n+1} - 1) + 3 \cdot (3^{n+1} - 1) = 1 - 2 \cdot 2^{n+2} + 3^{n+2}$$

$$y(n) = [1 - 2^{n+3} + 3^{n+2}] \delta_{-1}(n)$$

לכן

**דוגמא 5.7:** פתור את המשוואה:

$$y(n) - y(n-1) - 2y(n-2) = 3^n \delta_{-1}(n)$$

$$y(0) = 1; y(1) = -1$$

עבור תנאי ההתחלה  $y(0) = 1; y(1) = -1$ .  
 נסתכל על המשוואה כ  $y(n) - y(n-1) - 2y(n-2) = f(n)$  עם כניסה  $f(n) = 3^n \delta_{-1}(n)$ .  
 נדגים וריאציה על "הגישה הסטנדרטית". קודם נמצא פתרון פרטי  $y_p(n)$  כמו בשלב ב, אח"כ נשלים את הפתרון ע"י קומבינציה לינארית של פתרונות בסיס כך שהסכום מקיים את תנאי ההתחלה.

המשוואה האופיינית היא  $z^2 - z - 2 = 0$ , ופתרונותיה הם  $\alpha_1 = 2, \alpha_2 = -1$ .

הקבוצה היסודית של הפתרונות למשוואה ההומוגנית היא  $\{2^n, (-1)^n\}$

$$y_\delta(n) - y_\delta(n-1) - 2y_\delta(n-2) = \delta(n)$$

הוא מהצורה:  $y_\delta(n) = A_1 2^n + A_2 (-1)^n$  עם מקדמים המקיימים את התנאים:

$$A_1 2^0 + A_2 (-1)^0 = A_1 + A_2 = 1$$

$$A_1 2^{-1} + A_2 (-1)^{-1} = \frac{A_1}{2} - A_2 = 0$$

$$A_1 = \frac{2}{3}; A_2 = \frac{1}{3}$$

לכן:

$$y_\delta(n) = \left[ \frac{2}{3} 2^n + \frac{1}{3} (-1)^n \right] \delta_{-1}(n)$$

נבצע סכימת קונבולוציה. עבור  $n \geq 0$ :

$$y_p(n) = \sum_{m=0}^n 3^m \left[ \frac{2}{3} 2^{n-m} + \frac{1}{3} (-1)^{n-m} \right] = \frac{2}{3} \cdot 2^n \sum_{n=0}^n 3^m 2^{-m} + \frac{1}{3} (-1)^n \sum_{m=0}^n 3^m (-1)^{-m}$$

$$= \frac{2}{3} \cdot 2^n \sum_{m=0}^n 1.5^m + \frac{1}{3} (-1)^n \sum_{m=0}^n (-3)^m = \frac{2}{3} 2^n (-2)(1 - 1.5^{n+1}) + \frac{1}{3} (-1)^n \frac{1}{4} [1 - (-3)^{n+1}]$$

$$= -\frac{4}{3} \left\{ 2^n - \frac{1}{2} 3^{n+1} \right\} + \frac{1}{12} (-1)^n + 3^{n+1} = \frac{1}{12} (-1)^n - \frac{4}{3} 2^n + \frac{9}{4} 3^n$$

וברישום כולל:

$$y_p(n) = \left[ \frac{1}{12}(-1)^n - \frac{4}{3}2^n + \frac{9}{4}3^n \right] \delta_{-1}(n)$$

כדי לקיים את תנאי ההתחלה נוסיף פתרון משלים  $y_c(n)$  שבנוי מקומבינציות של הפתרונות היסודיים

$$y_c(n) = B_1 2^n + B_2 (-1)^n$$

שאת מקדמיו נקבע כך ש  $y(n) = y_c(n) + y_p(n)$  מקיים את תנאי ההתחלה

$$\begin{cases} y(0) = y_p(0) + y_c(0) = 1 + B_1 + B_2 = 1 \\ y(1) = y_p(1) + y_c(1) = 4 + 2B_1 - B_2 = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} B_1 + B_2 = 0 \\ 2B_1 - B_2 = -5 \end{cases}$$

נקבל  $B_1 = -\frac{5}{3} B_2 = \frac{5}{3}$ ,  $y_c(n) = \left[ -\frac{5}{3} \cdot 2^n + \frac{5}{3} (-1)^n \right] \delta_{-1}(n)$  ולכן הפתרון המבוקש הוא

$$\begin{aligned} y(n) &= \left[ -\frac{5}{3} 2^n + \frac{5}{3} (-1)^n + \frac{1}{12} (-1)^n - \frac{4}{3} 2^n + \frac{9}{4} 3^n \right] \delta_{-1}(n) = \\ &= \left[ -3 \cdot 2^n + \frac{7}{4} (-1)^n + \frac{9}{4} 3^n \right] \delta_{-1}(n) \end{aligned}$$

צורת הפתרון בדוגמה לעיל שונה מהגישה הסטנדרטית בכך ש  $y_c(n)$  אינו הפתרון למשוואה ההומוגנית. מאידך אין גלגול תנאי התחלה לאינדקסים שליליים ואפשר למצא באופן זה את המקדמים של  $y_c(n)$  גם ל  $N$  תנאי התחלה לא סמוכים (ר' הדוגמה הבאה).

**דוגמא 5.8:** פתור את המשוואה:

$$y(k+2) - 4y(k+1) + 4y(k) = 2\delta(k)$$

$$y(2) = 5; y(4) = 2$$

נעביר את המשוואה לצורה הסטנדרטית ע"י כך שנגדיר  $n = k+2$ .

$$y(n) - 4y(n-1) + 4y(n-2) = 2\delta(n-2)$$

המשוואה האופיינית היא  $z^2 - 4z + 4 = 0$ . פתרונה הוא  $\alpha = 2$  בכפילות  $q = 2$ , והקבוצה

היסודית היא  $\{2^n, n2^n\}$ .

$y_\delta(n)$ , הפתרון למשוואה :

$$y(n) - 4y(n-1) + 4y(n-2) = \delta(n)$$

בתנאי התחלה  $y_\delta(0) = 1, y_\delta(-1) = 0$  הוא :

$$y_\delta(n) = [A_1 2^n + A_2 n 2^n] \delta_{-1}(n)$$

כאשר  $A_1, A_2$  הם קבועים המקיימים את התנאים :

$$\begin{cases} A_1 \cdot 2^0 + A_2 \cdot 0 \cdot 2^0 = A_1 = 1 \\ A_1 \cdot 2^{-1} + A_2(-1) \cdot 2^{-1} = \frac{A_1}{2} - \frac{A_2}{2} = 0 \end{cases}$$

מכאן  $A_1 = A_2 = 1$ .

$$y_\delta(n) = [2^n + n \cdot 2^n] \delta_{-1}(n)$$

על סמך תכונות ההעתקה של אינדקס ה"זמן" והלינאריות

$$y_p(n) = 2[2^{n-2} + (n-2)2^{n-2}] \delta_{-1}(n-2) = \left[-\frac{1}{2} 2^n + \frac{1}{2} n \cdot 2^n\right] \delta_{-1}(n-2)$$

להשלמת תנאי התחלה נוסיף :

$$y_c(n) = B_1 2^n + B_2 n \cdot 2^n$$

ונדרוש שהסכום

$$y(n) = y_p(n) + y_c(n) = B_1 \cdot 2^n + B_2 \cdot n \cdot 2^n + \left[-\frac{1}{2} 2^n + \frac{1}{2} n \cdot 2^n\right] \delta_{-1}(n-2)$$

יקיים את תנאי ההתחלה. התנאים על הקבועים  $B_1, B_2$  :

$$\begin{cases} y(2) = B_1 \cdot 4 + B_2 \cdot 8 + \left[-\frac{1}{2} \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 8\right] = 4B_1 + 8B_2 + 2 = 5 \Rightarrow 4B_1 + 8B_2 = 3 \\ y(4) = B_1 \cdot 16 + B_2 \cdot 64 + \left[-\frac{1}{2} \cdot 16 + \frac{1}{2} \cdot 64\right] = 16B_1 + 64B_2 + 24 = 2 \Rightarrow 16B_1 + 64B_2 = -22 \end{cases}$$

מפתרון המערכת נקבל :  $B_1 = \frac{23}{8}; B_2 = -\frac{17}{16}$

$$y(n) = \left[\frac{23}{8} 2^n - \frac{17}{16} n \cdot 2^n\right] \delta_{-1}(n) + \left[-\frac{1}{2} \cdot 2^n + \frac{1}{2} \cdot n \cdot 2^n\right] \delta_{-1}(n-2)$$



### 5.3. התמרת Z.

בסעיף זה נכיר התמרה הנקראת התמרת Z. התמרה זו מתפקדת למערכות דיסקרטיות באופן המקביל לשימושי התמרת לפלס למערכות רציפות. אנו נשתמש בה לפתרון משוואות הפרשים ליניאריות וקבועות בזמן. היא גם מאפשרת להגדיר פונקצית תמסורת למערכת דיסקרטית שבדומה למקרה הרציף מהווה בסיס לייצוג ואפיון התנהגות המערכת הדיסקרטית בתחום התדר (נראה אך בלא הרחבה לבודה וכ"ו).

תהי  $f(n)$  סדרה (פונקציה דיסקרטית). **התמרת Z** ("החד צדדית") של  $f(n)$  מוגדרת באופן הבא:

$$(5.23) \quad F(z) = Z\{f(n)\} \equiv \sum_{i=0}^{\infty} f(i)z^{-i}$$

כאשר  $z$  הוא מספר מרוכב. ההתמרה מוגדרת לתחום ערכי  $z$  שעבורם הסכום מתכנס,  $|F(z)| < \infty$ . תחום זה נקרא תחום התכנסות (Region of convergence, ROC) של ההתמרה.

**דוגמא 5.9:** עבור  $f(n) = a^n \delta_{-1}(n)$  (ממשי או קומפלכסי)

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n = \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad \text{ROC: } |z| > |a|$$

$F(z)$  מתכנסת (כטור הנדסי אינסופי) לכל  $z$  שמחוץ למעגל שרדיוסו  $|a|$ .

תכונות שימושיות של התמרת Z (את רובן קל להוכיח מההגדרה):

(1) ליניאריות: אם  $Z\{f_1(n)\} = F_1(z)$  ו-  $Z\{f_2(n)\} = F_2(z)$  מתכנסים בתחום  $R_1, R_2$  אז

$$(5.24) \quad Z\{a_1 f_1(n) + a_2 f_2(n)\} = a_1 F_1(z) + a_2 F_2(z) \quad \text{ROC} = R_1 \cap R_2$$

(2) העתקה: יהי  $F(z) = Z\{f(n)\}$  ונניח  $n_0 \geq 1$  אז

$$(2.1) \quad \text{העתקה אחורה:}$$

$$(5.25) \quad Z\{f(n - n_0)\} = z^{-n_0} F(z) + z^{-n_0+1} f(-1) + z^{-n_0+2} f(-2) + \dots + f(-n_0)$$

בהנחה שהערכים  $f(-1), f(-2), \dots, f(-n_0)$  מוגדרים.

$$(2.2) \quad \text{העתקה קדימה:}$$

$$(5.26) \quad Z\{f(n + n_0)\} = z^{n_0} F(z) - z^{n_0} f(0) - z^{n_0-1} f(1) - \dots - z f(n_0 - 1)$$

(3) משפט הערך ההתחלתי:

עבור  $F(z) = Z\{f(n)\}$  ובהנחה ש  $\infty \in \text{ROC}$ ,

$$(5.27) \quad f(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z)$$

(4) משפט הערך הסופי :

$$(5.28) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = \lim_{z \rightarrow 1} [(1 - z^{-1})F(z)]$$

עבור  $F(z) = Z\{f(n)\}$  ובהנחה שהגבולות קיימים.

(5) גזירה (תכונה שימושית לפתרונות יסודיים עם כפילות)

$$(5.29) \quad nf(n) \leftrightarrow -z \frac{dF(z)}{dz}$$

ובהרחבה

$$(5.30) \quad n^k f(n) \leftrightarrow \left(-z \frac{d}{dz}\right)^k F(z)$$

(6) הרחבה/כווץ משתנה ההתמרה

$$(5.31) \quad \alpha^n f(n) \leftrightarrow F\left(\frac{z}{\alpha}\right)$$

ל  $a$  ממשי או קומפלקסי כלשהו

(7) קונבולוציה: אם  $Z\{f_1(n)\} = F_1(z)$  ו-  $Z\{f_2(n)\} = F_2(z)$  מתכנסים בתחום  $R_2, R_1$  אז

$$(5.32) \quad Z\left\{\sum_{m=0}^n f_1(m)f_2(n-m)\right\} = Z\left\{\sum_{m=0}^n f_1(n-m)f_2(m)\right\} = F_1(z) \cdot F_2(z)$$

ע"י שימוש בהגדרת ההתמרה והתכונות הנ"ל ניתן לקבל התמרה של פונקציות שימושיות רבות

(בכל המקרים הבאים מניחים שהסדרות סיבתיות  $f(n) = f(n)\delta_{-1}(n)$ )

### 5.3.1 טבלה של זוגות התמרה

$$(i) \quad Z\{\delta(n)\} = 1$$

$$(ii) \quad Z\{\delta_{-1}(n)\} = \frac{z}{z-1} = \frac{1}{1-z^{-1}} \quad ; |z| > 1$$

$$(iii) \quad Z\{n\} = \frac{z}{(z-1)^2} = \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} \quad ; |z| > 1$$

$$(iv) \quad Z\{n^2\} = \frac{z(z+1)}{(z-1)^3} = \frac{z^{-1}(1+z^{-1})}{(1-z^{-1})^3} \quad ; |z| > 1$$

$$(v) \quad Z\{a^n\} = \frac{z}{z-a} = \frac{1}{1-az^{-1}} \quad ; |z| > |a|$$

$$(vi) \quad Z\{na^n\} = \frac{az}{(z-a)^2} = \frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2} \quad ; |z| > |a|$$

$$(vii) \quad Z\{n^2a^n\} = \frac{az(z+a)}{(z-a)^3} = \frac{az^{-1}(1+az^{-1})}{(1-az^{-1})^3} \quad ; |z| > |a|$$

$$(viii) \quad Z\{a^n \cos(n\theta)\} = \frac{z^2 - a \cos \theta z}{z^2 - 2a \cos \theta z + a^2} = \frac{1 - a \cos \theta z^{-1}}{1 - 2a \cos \theta z^{-1} + a^2 z^{-2}} \quad ; |z| > |a|$$

$$(ix) \quad Z\{a^n \sin(n\theta)\} = \frac{a \sin \theta z}{z^2 - 2a \cos \theta z + a^2} = \frac{a \sin \theta z^{-1}}{1 - 2a \cos \theta z^{-1} + a^2 z^{-2}} \quad ; |z| > |a|$$

### 5.3.2. היפוך התמרת ה Z

הצגת הבעיה: נתון  $F(z)$  יש למצוא  $f(n)$  שעבורו  $F(z) = Z\{f(n)\}$

נסמן  $f(n) = Z^{-1}\{F(z)\}$  (IZT, Inverse Z-Transform).

אנו מתעניינים בשיטות למציאת ה IZT לפונקציה רציונלית מהצורה

$$(5.33) \quad F(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_L z^{-L}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}}, \quad L \leq N$$

נראה 3 שיטות

(1) פיתוח לטור חזקות (רקורסיבי, לא רואים ממנו בדור"כ את הפתרון הסגור).

(2) פיתוח לשברים חלקיים ושימוש בטבלת ההתמרות וחוקיו (הדרך).

(3) שיטת הרזידוס (זו ה"הגדרה", להשכלה כללית...).

#### 5.3.2.1 פתוח לטור חזקות

נשווה מקדמי חזקות  $z^{-k}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, n, \dots$  לאחר הכפלת שני האגפים במכנה של  $F(z)$

$$(5.34) \quad F(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_L z^{-L}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}} = f(0) + f(1)z^{-1} + f(2)z^{-2} + \dots + f(n)z^{-n} + \dots$$

מקבלים

$$(5.35) \quad \begin{cases} f(0) = \frac{b_0}{a_0} \\ f(1) = \frac{1}{a_0} [b_1 - f(0)a_1] \\ f(2) = \frac{1}{a_0} [b_2 - f(1)a_1 - f(0)a_2] \\ \vdots \\ f(n) = \frac{1}{a_0} [b_n - \sum_{i=1}^n f(n-i)a_i] \quad (\text{where } b_n = 0 \text{ for } n > L) \end{cases}$$

5.3.2.2 פרוק לשברים חלקיים

אם ל  $F(z)$  יש קטבים פשוטים אפשר לכתוב אותו באופן

$$(5.36) \quad F(z) = B_0 + \frac{C_1}{1 - \alpha_1 z^{-1}} + \frac{C_2}{1 - \alpha_2 z^{-1}} + \dots + \frac{C_N}{1 - \alpha_N z^{-1}} = \\ = B_0 + \frac{C_1 z}{z - \alpha_1} + \frac{C_2 z}{z - \alpha_2} + \dots + \frac{C_N z}{z - \alpha_N}$$

היכן ש  $B_0 = \frac{b_N}{a_N}$  (לכן  $0 \neq$  אם  $L < N$ )

$$(5.37) \quad C_k = (z - \alpha_k) \frac{F(z)}{z} \Big|_{z=\alpha_k}$$

כפי שקל להראות ע"י הכפלת 2 האגפים ב  $(z - \alpha_k)/z$  והצבת  $z = \alpha_k$  לתוצאה.

לכן ה IZT הינו

$$f(n) = B_0 \delta(n) + \left[ \sum_{k=0}^N C_k \alpha_k^n \right] \delta_{-1}(n)$$

אם לקוטב  $\alpha$  יש כפילות  $q$  קטבים אלה תורמים לפרוק לשברים חלקיים קטע מהצורה

$$(5.38) \quad \frac{D_0 z}{(z - \alpha)^q} + \frac{D_1 z}{(z - \alpha)^{q-1}} + \dots + \frac{D_{q-1} z}{(z - \alpha)}$$

שמקדמיו נתונים ע"י

$$(5.39) \quad D_k = \frac{1}{k!} \frac{d}{dz^k} [Q(z)] \Big|_{z=\alpha} \quad k = 0, \dots, q-1 \quad \text{where } Q(z) = (z - \alpha)^q \frac{F(z)}{z}$$

והם תורמים להתמרה ההפוכה פתרונות מהצורה  $E_{q-1} \alpha^n + E_{q-2} n \alpha^n + \dots + E_0 n^{q-1} \alpha^n$ . הבעיה היא שהצורות ב (5.38) אינן בני הזוג של בסיס הפתרונות ז"א כללית  $E_k \neq D_k$  (ראה טבלת זוגות של  $Z$  טרנספורם) ויש להעזר בחוקי טרנספורם כדי להשלים תרגום חזרה למישור הזמן.

דרך חילופית היא להניח במקום (5.38) שברים חלקיים שהם כן מהצורה הנוחה ולמצא את המקדמים עבורם עוד במישור ה  $Z$ .

למשל עבור  $q = 2$  נציב

$$\frac{E_0 z \alpha}{(z - \alpha)^2} + \frac{E_1 z}{(z - \alpha)} = \frac{D_0 z}{(z - \alpha)^2} + \frac{D_1 z}{(z - \alpha)} \leftrightarrow E_0 n \alpha^n + E_1 \alpha^n$$

עבור  $q=3$  נציב

$$E_0 n^2 \alpha^n + E_1 n \alpha^n + E_2 \alpha^n \leftrightarrow \frac{E_0 z(z + \alpha)}{(z - \alpha)^3} + \frac{E_1 z \alpha}{(z - \alpha)^2} + \frac{E_2 z}{(z - \alpha)} = \frac{D_0 z}{(z - \alpha)^3} + \frac{D_1 z}{(z - \alpha)^2} + \frac{D_2 z}{(z - \alpha)}$$

כשכעת קל לקבל את המקדמים  $E_k$  ע"י השואת מקדמי חזקות במונים לאחר הבאתם למכנה משותף.

דרך נוספת של שימוש בשברים חלקיים היא לרשום קומבינציה לינארית (עם מקדמים כלליים) של פתרונות בסיסיים צפויים (על פי הקטבים וריבויים), לבצע התמרת  $Z$  ולהפוך את הסכום לפי רציונלית יחידה (עם מכנה משותף). קביעת המקדמים תעשה ע"י השואת מקדמי חזקות במונים (דרך זו עוקפת את השימוש ב (5.37) וב (5.39) ומעשית אם אין הרבה אברים).

בעת שימוש בנוסחאות (5.36)-(5.39) עדיף בדרי"כ לעבוד עם פ' רציונלית ב  $z$  (ולא ב  $z^{-1}$ )

**דוגמא 5.10:** מצא את ה IZT של:

$$F(z) = \frac{1+z^{-1}}{1-3z^{-1}+2z^{-2}}$$

נפרק את  $F(z)$  לשברים חלקיים באופן הבא:

$$F(z) = \frac{z(z+1)}{z^2-3z+2} = \frac{z(z+1)}{(z-1)(z-2)}$$

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{A}{(z-1)} + \frac{B}{(z-2)} = \frac{-2}{(z-1)} + \frac{3}{(z-2)} \Rightarrow$$

$$F(z) = -2 \frac{1}{1-z^{-1}} + 3 \frac{1}{1-2z^{-1}}$$

היכן שאת  $A, B$  מוצאים על פי (5.39) או השואת מונים

$$A(z-2) + B(z-1) = z+1 \Leftrightarrow A = -2, B = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} z^0: & -2A - B = 1 \\ z^1: & A + B = 1 \end{cases}$$

לפי הטבלה:

$$F(z) = -2 Z\{\delta_{-1}(n)\} + 3 Z\{2^n \delta_{-1}(n)\}$$

ולפי תכונת הליניאריות של ההתמרה ברור ש:

$$f(n) = -2\delta_{-1}(n) + 3 \cdot 2^n \delta_{-1}(n) = [-2 + 3 \cdot 2^n] \delta_{-1}(n)$$

**דוגמא 5.11:** מצא את ה IZT של

$$F(z) = \frac{z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 + \frac{1}{2}z^{-1}\right)^2}$$

נעבור ל משתנה  $z$  ונמצא פתוח לשברים חלקיים של

$$F(z) = \frac{z^2}{\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z + \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{Cz}{z - \frac{1}{2}} + \frac{D_0z}{\left(z + \frac{1}{2}\right)^2} + \frac{D_1z}{z + \frac{1}{2}}$$

$$C = \frac{\left(z - \frac{1}{2}\right)F(z)}{z} \Big|_{z=\frac{1}{2}} = \frac{z}{\left(z + \frac{1}{2}\right)^2} \Big|_{z=\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$Q = \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 \frac{F(z)}{z} = \frac{z}{\left(z - \frac{1}{2}\right)}, \quad D_0 = Q(z) \Big|_{z=-\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2}, \quad D_1 = \frac{dQ(z)}{dz} \Big|_{z=-\frac{1}{2}} = \frac{-1/2}{\left(z - \frac{1}{2}\right)^2} \Big|_{z=-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}$$

לכן (לשים לב למעבר שמתבצע מ  $D_0$  ל  $E_0$ )

$$F(z) = \frac{\frac{1}{2}z}{z - \frac{1}{2}} + \frac{-z\left(-\frac{1}{2}\right)}{z + \frac{1}{2}} + \frac{-\frac{1}{2}z}{\left(z + \frac{1}{2}\right)^2} \Rightarrow f(n) = \left[ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(n + \frac{1}{2}\right) \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right] \delta_{-1}(n)$$

לשים לב שאפשר "לבדוק" את התוצאה ע"י השוואת ערכים ראשונים  $n=0,1,..$  ספורים עם הפיתוח לטור של  $F(z)$  על-פי (5.35).

### 5.3.2.3 שימוש בהגדרת ה IZT

ההגדרה הפורמלית של ההתמרה ההפוכה היא

$$(5.40) \quad f(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C F(z) z^{n-1} dz$$

הנכונות נובעת ממשפט האינטגרל של Cauchy שאומר שהאינטגרל הבא על עקום  $C$  שמקיף את הראשית

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_C z^{-k} dz = \begin{cases} 1 & k=1 \\ 0 & k \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2\pi j} \oint_C (f(0) + f(1)z^{-1} + \dots + f(n)z^{-n} + \dots) z^{n-1} dz = f(n)$$

$\Gamma$  הוא עקום סגור בתחום ההתכנסות של  $F(z)$  Cauchy. הראה גם כי אפשר לפתח אותו ע"י

$$(5.41) \quad f(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} F(z) z^{n-1} dz = \sum_{k=1}^N \left( \text{residue of } \frac{F(z)z^n}{z} \text{ at } \alpha_k \right)$$

ה residue של  $F(z)$  בקוטב פשוט  $\alpha$ ,  $\text{Res} \{ X(z) \text{ at } \alpha \} = \lim_{z \rightarrow \alpha} (z - \alpha) X(z)$ , לשים לב

לקשר הפשוט בין ה residues למקדמי הפרוק לשברים חלקיים. לא נרחיב למקרה של קטבים עם כפילות. אפשר להסיק את מקרה הריבוי ממצאת מקדמי הפרוק לשברים חלקיים במקרים אלה.

$$F(z) = \frac{z}{\left(z - \frac{3}{4}\right)\left(z + \frac{1}{2}\right)} \quad \text{ל IZT מצא 5.12: דוגמא}$$

$$X(z) = \frac{F(z)}{z} z^n = \frac{z^n}{\left(z - \frac{3}{4}\right)\left(z + \frac{1}{2}\right)} \quad \text{נסמן (5.41) ונפתח לפי}$$

$$\begin{aligned} f(n) &= \text{Res}[X(z); z = \frac{3}{4}] + \text{Res}[X(z); z = -\frac{1}{2}] \\ &= \left(z - \frac{3}{4}\right) X(z) \Big|_{z=3/4} + \left(z + \frac{1}{2}\right) X(z) \Big|_{z=-1/2} = \frac{4}{5} \left(\frac{3}{4}\right)^n - \frac{4}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{aligned}$$

### 5.3.3 שימוש בהתמרת Z לפתרון משוואת הפרשים

ניישם את הידע שרכשנו בהתמרות z לפתרון משוואת הפרשים (5.2) עם תנאי ההתחלה

$$y(-N), y(-N+1), \dots, y(-1)$$

בצד התמרת Z של שני אגפי המשוואה; נקבל:

$$(5.42) \quad Y(z)[a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}] + P_y(z) = U(z)[b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_L z^{-L}] + P_u(z)$$

היכן ש  $R(z), P(z)$  הם פולינומים מדרגות  $N-1, L-1$  לכל היותר, התלויים ב-

$$y(-1), \dots, y(-N) \quad \text{ו} \quad u(-1), \dots, u(-L)$$

נסמן

$$(5.43) \quad A(z) = a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}, \quad B(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_L z^{-L}$$

ונחלץ את  $Y(z)$

$$(5.44) \quad Y(z) = \frac{B(z)}{A(z)} U(z) + \frac{P(z) - R(z)}{A(z)}$$

**הגדרה: פונקציית התמסורת** של המערכת (5.2) מוגדרת כיחס בין התמרת Z של התגובה לבין

$$\text{התמרת Z של העירור בהנחה של תנאי התחלה אפס ו} \quad u(n) = 0, \forall n < 0.$$

נסמן אותו ע"י  $H(z)$

$$H(z) := \frac{Y(z)}{U(z)}, \quad \text{for } y(-N) = \dots = y(-1) = 0; \text{ and } u(m) = 0, \forall m < 0$$

אם נקח ב (5.44) תנאי התחלה אפס  $P(z) \equiv 0, R(z) \equiv 0$  נקבל ש

$$(5.45) \quad H(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$$

ונוכל לכן לכתוב את (5.44) באופן

$$(5.46) \quad Y(z) = H(z)U(z) + \frac{P(z) - R(z)}{A(z)}$$

רואים כי המכנה של פונקציית התמסורת הוא הפולינום האופייני של משוואת ההפרשים שהוגדר ב (5.10) לכן הקטבים של פונקציית התמסורת קובעים את בסיס הפתרונות של תגובת המערכת. האפסים של  $B(z)$  קרויים האפסים של פונקציית התמסורת. יוצא שהמערכת יציבה אם ורק אם כל הקטבים  $\alpha_k$  של  $H(z)$  מקיימים  $|\alpha_k| < 1$ .

**טענה:**  $H(z) = Z\{h(n)\}$  היכן ש  $h(n)$  הוא התגובה להלם של המערכת (הוגדר ב (5.19)) הוכחה: עבור כניסת הלם  $U(z) = 1, P(z) = 0$ , על פי הגדרת התגובה להלם ב (5.19)  $R(z) = 0$ . בתנאים אלה  $Y(z) = H(z)$ .

הקשר בטענה הנ"ל דומה לקשר בין פ' התמסורת של מערכת רציפה והתגובה שלה להלם. ראינו גם שעבור מערכת רציפה יש לפ' התמסורת משמעות של הענות בתדר עבור ערכים של  $s = j\omega$ .

לפ' התמסורת הדיסקרטית יש משמעות דומה עבור  $z = e^{j\theta}$  (העובדה שמעגל היחידה סביב הראשית של המישור הקומפלכסי מחליף את הציר הדמיוני לא מפתיעה אותנו כי כבר הכרנו אותם כמפרידים, בהתאמה, בין התחום של קטבים "יציבים" ו"לא יציבים"). התכונה המזכרת מובאת בניסוח מדויק בטענה הבאה.

**טענה:** אם הכניסה למערכת יציבה הינה  $u(n) = C_u \cos(n\theta)$  אז התגובה שלה  $y(n)$  במצב המתמיד תהיה  $y_s(n) = C_y \cos(n\theta + \phi)$  היכן ש

$$\frac{C_y}{C_u} = |H(e^{j\theta})|, \quad \phi = \angle H(e^{j\theta}) \quad (\text{i.e. } H(e^{j\theta}) = |H(e^{j\theta})|e^{j\phi})$$

הוכחה: נסתכל על הכניסה כ  $u(n) = C_u \frac{e^{jn\theta} + e^{-jn\theta}}{2}$  לכן התמרת  $Z$  לכניסה נתונה ע"י (ר' (v) בטבלה)

$$U(z) = \frac{1}{2} C_u \left[ \frac{z}{(z - e^{j\theta})} + \frac{z}{(z - e^{-j\theta})} \right]$$

נתחיל מהביטוי (5.46) ל  $Y(z)$ . נציב לתוכו את ההתמרה של הכניסה ונזכור שאנו צריכים את  $y_s(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} y(n)$

בפרוק לשברים חלקיים של  $Y(z)$ , הקטבים של  $H(z)$  תורמים ביטויים דועכים לאפס עבור  $n \gg 0$ , לכן נזרוק את האברים ב (5.46) הקשורים לתנאי התחלה. נותרים עם

$$Y(z) = H(z) \frac{1}{2} C_u \left[ \frac{z}{(z - e^{j\theta})} + \frac{z}{(z - e^{-j\theta})} \right] \Rightarrow \frac{Y(z)}{z} = H(z) \frac{1}{2} C_u \left[ \frac{1}{(z - e^{j\theta})} + \frac{1}{(z - e^{-j\theta})} \right]$$



שבפיתוחו לשברים חלקיים שוב מעוניינים למציאת  $y_s(n)$  רק בשברים החלקיים הנובעים מהקטבים של  $U(z)$ :

$$\frac{Y_S(z)}{z} = \frac{1}{2} C_u \left[ \frac{H(e^{j\theta})}{(z - e^{j\theta})} + \frac{H(e^{-j\theta})}{(z - e^{-j\theta})} \right] = \frac{1}{2} C_u |H(e^{j\theta})| \left[ \frac{e^{j\phi}}{(z - e^{j\theta})} + \frac{e^{-j\phi}}{(z - e^{-j\theta})} \right]$$

היכן שהשתמשנו בעובדה ש  $H(z)$  פונקציה רציונאלית ממשית (מנת פולינומים שמקדמיהם ממשיים) לכן:

$$H(e^{j\theta}) = |H(e^{j\theta})| e^{j\phi} \Rightarrow H(e^{-j\theta}) = |H(e^{j\theta})| e^{-j\phi}$$

נבצע התמרה הפוכה ונקבל את מה שרצינו להוכיח:

$$y_s(n) = \frac{1}{2} C_u |H(e^{j\theta})| [e^{j\theta n} e^{j\phi} + e^{-j\theta n} e^{-j\phi}] = C_y \cos(n\theta + \phi)$$

**דוגמא 5.13:** מצא את הפתרון למשוואת הפרשים:

$$y(n) - 3y(n-1) + 2y(n-2) = \delta_{-1}(n)$$

עם תנאי ההתחלה  $y(-1) = 1; y(-2) = 1$ .

נפעיל את התמרת  $Z$  על שני אגפי המשוואה:

$$Y(z) - 3[z^{-1}Y(z) + y(-1)] + 2[z^{-2}Y(z) + z^{-1}y(-1) + y(-2)] = \frac{1}{1-z^{-1}}$$

$$Y(z)[1 - 3z^{-1} + 2z^{-2}] - 1 + 2z^{-1} = \frac{1}{1-z^{-1}}$$

$$Y(z) = \left[ \frac{1}{1-z^{-1}} + 1 - 2z^{-1} \right] \frac{1}{1-3z^{-1}+2z^{-2}} = \frac{2-3z^{-1}+2z^{-2}}{(1-z^{-1})^2(1-2z^{-1})} = \frac{z(2z^2-3z+2)}{(z-1)^2(z-2)}$$

ע"י פרוק לשברים חלקיים נקבל:

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{C}{(z-2)} + \frac{D_0}{(z-1)^2} + \frac{D_1}{(z-1)}$$

$$C = \frac{2z^2-3z+2}{(z-1)^2} \Big|_{z=2} = 4, \quad Q(z) = \frac{2z^2-3z+2}{(z-2)}, \quad D_0 = Q(1) = -1, \quad \frac{dQ(z)}{dz} \Big|_{z=1} = -2$$

לכן

$$y(n) = Z^{-1}\{Y(z)\} = [4 \cdot 2^n - n - 2] \delta_{-1}(n)$$

**דוגמא 5.14:** נפתור את משוואת ההפרשים שבדוגמא 5.2: ע"י התמרת Z.

$$y(n) - \frac{1}{4}y(n-1) - \frac{1}{8}y(n-2) = 3u(n) + \frac{1}{16}u(n-1); \quad u(n) = \delta_{-1}(n); \quad y(-1) = 1, y(-2) = 0$$

נפעיל התמרה על שני האגפים

$$Y(z) - \frac{1}{4}[z^{-1}Y(z) + y(-1)] - \frac{1}{8}[z^{-2}Y(z) + z^{-1}y(-1) + y(-2)] = 3U(z) + \frac{1}{16}[z^{-1}U(z) + u(-1)]$$

$$Y(z)[1 - \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{1}{8}z^{-2}] - \frac{1}{4} - \frac{1}{8}z^{-1} = U(z)[3 + \frac{1}{16}z^{-1}]$$

$$Y(z)[1 - \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{1}{8}z^{-2}] = \frac{1}{4} + \frac{1}{8}z^{-1} + \frac{1}{1-z^{-1}}[3 + \frac{1}{16}z^{-1}]$$

$$Y(z) = \frac{\frac{13}{4} - \frac{1}{16}z^{-1} - \frac{1}{8}z^{-2}}{\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{1}{8}z^{-2}\right)(1 - z^{-1})}$$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{\frac{13}{4}z^2 - \frac{1}{16}z - \frac{1}{8}}{\left(z^2 - \frac{1}{4}z - \frac{1}{8}\right)(z-1)} = \frac{\frac{13}{4}z^2 - \frac{1}{16}z - \frac{1}{8}}{\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z + \frac{1}{4}\right)(z-1)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{\left(z - \frac{1}{2}\right)} + \frac{C}{\left(z + \frac{1}{4}\right)}$$

$$A = \frac{\frac{13}{4}z^2 - \frac{1}{16}z - \frac{1}{8}}{\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z + \frac{1}{4}\right)} \Big|_{z=1} = \frac{49}{10},$$

$$B = \frac{\frac{13}{4}z^2 - \frac{1}{16}z - \frac{1}{8}}{(z-1)\left(z + \frac{1}{4}\right)} \Big|_{z=1/2} = -\frac{7}{4},$$

$$C = \frac{\frac{13}{4}z^2 - \frac{1}{16}z - \frac{1}{8}}{\left(z - \frac{1}{2}\right)(z-1)} \Big|_{z=-1/4} = \frac{1}{10}$$

לכן

$$y(n) = \left\{ \frac{49}{10} - \frac{7}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{10}\left(-\frac{1}{4}\right)^n \right\} \delta_{-1}(n)$$

אגב, פי התמסורת של המערכת היא כמובן

$$H(z) = \frac{3 + \frac{1}{16}z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{1}{8}z^{-2}}$$

לעתים עלינו לפתור משוואות הפרשים כאשר תנאי ההתחלה הנתונים אינם  $y(-1), \dots, y(-N)$ , אלא תנאי התחלה אחרים. במקרים כאלה, קודם לפתורנה ע"י ההתמרה, יש לחשב את  $y(-N), y(-N+1), \dots, y(-1)$  מתוך תנאי ההתחלה הנתונים ומתוך משוואת הפרשים.

במקרה שבו נתונה המשוואה (5.1) עם תנאי ההתחלה הנתונים עבור  $y(0), y(1), \dots, y(N-1)$  אפשר גם לפעול באופן הבא: מכיוון שהמשוואה תקפה לכל  $n$ , נוכל לרשום אותה בצורה הבאה:

$$a_0 y(n+N) + \dots + a_N y(n) = b_0 u(n+N) + \dots + b_L u(n-L+N)$$

ע"י נבצע התמרת  $Z$  ונשתמש ב (5.26):

$$[a_0 z^N + \dots + a_N z^0] Y(z) + F_y(z) = [b_0 z^N + \dots + b_L z^{N-L}] U(z) + F_u(z)$$

כאשר  $F_y(z), F_u(z)$  הינם פולינומים שמקדמיהם תלויים בערכי ההתחלה עבור  $u(0), \dots, u(N-1)$ , ו-  $y(0), \dots, y(N-1)$  בהתאמה. יש לבדוד את  $Y(z)$ :

$$(5.47) \quad Y(z) = U(z) \frac{b_0 z^N + \dots + b_L z^{N-L}}{a_0 z^N + \dots + a_N z^0} + \frac{S-Q}{a_0 z^N + \dots + a_N z^0}$$

ולמצוא את  $y(n) = Z^{-1}\{Y(z)\}$ .

**דוגמא 5.15:** מצא את הפתרון למשוואת הפרשים:

$$y(n) - 3y(n-1) + 2y(n-2) = \delta_{-1}(n)$$

עם תנאי ההתחלה  $y(0) = 1; y(1) = 0$ .

נרשום את המשוואה בצורה:

$$y(n+2) - 3y(n+1) + 2y(n) = \delta_{-1}(n+2)$$

נבצע התמרה  $Z$ :

$$[z^2 Y(z) - z^2 y(0) - z y(1)] - 3[z Y(z) - z y(0)] + 2Y(z) = z^2 \frac{z}{z-1} - z^2 - z = \frac{z}{z-1}$$

$$Y(z)[z^2 - 3z + 2] - z^2 + 3z = \frac{z}{z-1}$$

$$Y(z) = \frac{\frac{z}{z-1} + z^2 - 3z}{z^2 - 3z + 2} = \frac{z^3 - 4z^2 + 4z}{(z-1)(z^2 - 3z + 2)} = \frac{z(z-2)^2}{(z-1)^2(z-2)} = \frac{z(z-2)}{(z-1)^2}$$

נפרק את  $Y(z)$  לשברים חלקיים:

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{D_0}{(z-1)^2} + \frac{D_1}{z-1}$$

כאן  $Q(z) = z-2$ ,  $D_0 = Q(1) = -1$ ,  $D_1 = \frac{dQ}{dz} = 1$  ולכן:

$$y(n) = Z^{-1}\{Y(z)\} = [-n+1]\delta_{-1}(n)$$

### 5.3.4. קשר בין התמרת לפלס של פונקציה רציפה והתמרת Z של דגימתה

נתבונן בפונקציה  $f_1(t)$  הבאה, שהיא פונקציה זמן :

$$(5.48) \quad f_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_0(n)\delta(t-nT)$$

כאן  $f_0(n)$  היא פונקציה דיסקרטית, ו  $\delta(t)$  היא פונקציה ההלם של דיראק. ניתן לתאר פונקציה זו כ"מסרק", אשר "שניו" הן פונקציות הלם, והרווח ביניהן T.

נמצא את  $F_1(s)$ , התמרת לפלס של  $f_1(t)$ .

$$(5.49) \quad F_1(s) = L\{f_1(t)\} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} f_0(n)\delta(t-nT)e^{-st}dt = \sum_{n=0}^{\infty} f_0(n)e^{-sTn}$$

נגדיר  $z = e^{sT}$ . המשואה נרשמת עתה :

$$(5.50) \quad L\{f_1(t)\} = \sum_{n=0}^{\infty} f_0(n)e^{-sTn} = \sum_{n=0}^{\infty} f_0(n)z^{-n} = Z\{f_0(n)\}$$

כלומר, התמרת לפלס של  $f_1(t)$  שווה להתמרת Z של  $f_0(n)$ , כאשר  $z = e^{sT}$ .

תהי  $f_2(t)$  הפונקציה (הרציפה למקוטעין) המתקבלת משחזור של הפונקציה הדיסקרטית  $f_0(n)$ , בצורה שתוארה בתחילת הפרק :

$$(5.51) \quad f_2(t, nT \leq t < (n+1)T) = f_0(n)$$

את  $f_2(t)$  נוכל לבטא בצורה הבאה :

$$(5.52) \quad f_2(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_0(n)[\delta_{-1}(t-nT) - \delta_{-1}(t-T(n+1))]$$

(מניחים ש- $f_0(n)$  מוגדרת עבור  $n \geq 0$ , ו- $f_2(t)$  מוגדרת עבור  $t \geq 0$ ).

נמצא את התמרת לפלס של  $f_2(t)$  :

$$\begin{aligned} F_2(s) &= L\{f_2(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \sum_{n=0}^{\infty} f_0(n)[\delta_{-1}(t-nT) - \delta_{-1}(t-T(n+1))]dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} f_0(n) \int_0^{\infty} e^{-st} [\delta_{-1}(t-nT) - \delta_{-1}(t-T(n+1))]dt = \sum_{n=0}^{\infty} f_0(n)e^{-sTn} \frac{1-e^{-Ts}}{s} \end{aligned}$$

$$(5.53) \quad F_2(s) = \frac{1-e^{-Ts}}{s} \sum_{n=0}^{\infty} f_0(n)e^{-sTn}$$

נשתמש במשוואות (5.49), (5.50) לקבלת :

$$(5.54) \quad F_2(s) = \frac{1-e^{-Ts}}{s} F_1(s) = \frac{1-e^{-Ts}}{s} \cdot Z\{f_0(n)\} \Big|_{z=e^{sT}}$$

נתבונן ביחס התמסורת:

$$(5.55) \quad G(s) = \frac{F_2(s)}{F_1(s)} = \frac{1 - e^{-Ts}}{s}$$

הוא מייצג רכיב אשר תגובתו לעירור  $\delta(t)$  היא  $\delta_{-1}(t) - \delta_{-1}(t-T)$ .

שים לב לכך ש- $f_1(t), f_2(t)$  אינן יכולות להיות פתרון למשוואה דיפרנציאלית רגילה, ליניארית ועם

$$\sum_{k=0}^n a_k y^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^n b_k u^{(k)}(t)$$

הקשר המקורב בין פ' התמסורת הרציפה והדיסקרטית דרך  $z = e^{Ts}$ . למדנו כי ערכי פ' התמסורת על מעגל היחידה מתארים למערכת דיסקרטית הענות בתדר ממש כמו שפ' התמסורת של מערכת רציפה מתארת את ההענות בתדר עבור ערכים על הציר הדמיוני. הקשר הנ"ל תואם תכונות אלה כי  $z = e^{j\theta} \leftrightarrow s = j\omega$ . ואמנם עקומות בודה של מערכת דיסקרטית (נושא שאינו

בחומר הנלמד) מתארות הגבר ופאזה של פ' התמסורת  $H(z)$  לערכים  $H(e^{j\theta}), 0 \leq \theta \leq \pi$ .

כמו כן הקשר  $z = e^{Ts}$  מתאר נכון את ההפרדה של המישור הקומפלכסי לאזור ה"יציב" (תוך מעגל היחידה תואם את חצי המישור השמאלי) וה"לא יציב" (חוץ מעגל היחידה תואם את חצי המישור הימני) כשהם מופרדים ע"י העקום הנותן לפ' התמסורת משמעות של הענות לכניסה סינוסואידלית.

#### 5.4 הצגות מצב למערכות דיסקרטיות

מערכת ליניארית דיסקרטית קבועה בזמן וסיבתית שקודם יוצגה ע"י משוואת הפרשים מסדר  $N$  ב(5.2), ניתנת לייצוג גם ע"י מערכת של  $N$  משוואות דיסקרטיות מסדר ראשון ב- $N$  משתני מצב. נגביל את הדיון למערכות בעלות כניסה יחידה ויציאה יחידה.

$$\underline{x}(n+1) = A\underline{x}(n) + Bu(n) \quad \& \quad \underline{x}(0)$$

(5.56)

$$y(n) = C\underline{x}(n) + d u(n)$$

$\underline{x}(n)$  הוא וקטור משתני המצב הדיסקרטיים, או וקטור המצב ו  $\underline{x}(0)$  וקטור תנאי התחלה

$$\underline{x}(n) = \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \\ \vdots \\ x_N(n) \end{bmatrix}, \quad \underline{x}(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \vdots \\ x_N(0) \end{bmatrix}$$

$u(n)$  ו  $y(n)$  הם כמקודם העירור והתגובה ו  $A, B, C, d$  הם מטריצות מהממדים המתבקשים.

דהיינו  $A$  ממימד  $N \times N$ , שקרויה המטריצה הדינמית של ההצגה.

$B$  ממימד  $N \times 1$ .

$C$  ממימד  $1 \times N$ .

$d$  ממימד  $1 \times 1$ .

להצגת מצב יש פתרון יחיד לכניסה ותנאי התחלה נתונים.

מלבד  $y(n)$  הפתרון נותן גם את משתני המצב  $x_k(n), k=1, \dots, N$  שמעוניינים בהם לעיתים (במיוחד כאשר הם נבחרים כמשתנים בעלי משמעות להבנת המערכת).

כמו במקרה הרציף, הצגת מצב של מערכת איננה יחידה. כל מטריצה לא סינגולרית  $T$  יכולה

להגדיר משתני מצב חדשים  $\underline{q}(n) = T^{-1}\underline{x}(n)$  והצגה אקויוולנטית

$$\{A, B, C, d\} \rightarrow \{A_q, B_q, C_q, d_q\}$$

$$(5.57) \quad A_q = T^{-1}AT, \quad B_q = T^{-1}B, \quad C_q = CT, \quad d_q = d$$

כפי שקל להוכיח ע"י ההצבה של  $\underline{x}(n) = T\underline{q}(n)$  להצגת המצב.

נראה איך אפשר לקבל הצגת מצב ("הצגת משתני פאזה") למערכת המתארת ע"י משוואת

ההפרשים (5.2) עם תנאי התחלה סטנדרטיים ו  $a_0 = 1$ :

$$(5.58) \quad y(n) + \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^L b_k u(n-k), \quad y(-N), y(-N+1), \dots, y(-1)$$

נסתכל ראשית על משוואת העזר

$$(5.59) \quad y_f(n) + \sum_{k=1}^N a_k y_f(n-k) = f(n)$$

נגדיר באמצעותה משתני מצב כדלקמן

$$x_1(n) = y_f(n-N)$$

$$x_2(n) = y_f(n-N+1) = x_1(n+1)$$

$$x_3(n) = y_f(n-N+2) = x_2(n+1)$$

.

.

$$x_N(n) = y_f(n-1) = x_{N-1}(n+1)$$

ולבסוף נשתמש ב (5.59) לקבל

$$x_N(n+1) = y_f(n) = -\sum_{k=1}^N a_k y_f(n-k) + f(n) = f(n) + [-a_N \quad -a_{N-1} \quad \dots \quad -a_1] \begin{bmatrix} x_1(n) \\ \vdots \\ x_N(n) \end{bmatrix}$$

קבלנו

$$(5.60) \quad \begin{cases} \underline{x}(n+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & & & 0 & 1 \\ -a_N & -a_{N-1} & \dots & & -a_1 \end{bmatrix} \underline{x}(n) + \begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} f(n) \\ y_f(n) = [-a_N, \dots, -a_1] \underline{x}(n) + f(n) \end{cases}$$

דהינו קבלנו הצגת מצב ל (5.59) עם מטריצות  $\{A_f, B_f, C_f, d_f\}$  הנתונות ע"י

$$(5.61) \quad A_f = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & & & 0 & 1 \\ -a_N & -a_{N-1} & \dots & & -a_1 \end{bmatrix}, \quad B_f = \begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C_f = [-a_N, \dots, -a_1], \quad d_f = 1$$

הפתרון המבוקש  $y(n)$  מתיחס ל  $y_f(n)$  על פי

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{k=0}^N b_k y_f(n-k) = b_0 y_f(n) + b_1 x_N(n) + b_2 x_{N-1}(n) + \dots + b_N x_1(n) = \\ &= b_0 C_f \underline{x}(n) + b_0 u(n) + [b_N, \dots, b_1] \underline{x}(n) = \{b_0 C_f + [b_N, \dots, b_1]\} \underline{x}(n) + b_0 u(n) \end{aligned}$$

לכן הצגת המצב ל (5.58) נתונה ע"י

$$(5.62) \quad \begin{aligned} A &= A_f, & B &= B_f, \\ C &= b_0 C_f + [b_N, \dots, b_1], & d &= b_0 \end{aligned}$$

נדרש גם לתרגם את תנאי ההתחלה. נרכז את תנאי ההתחלה לוקטור ונגדיר מטריצות

$$(5.63) \quad \underline{y}_I = \begin{bmatrix} y(-N) \\ \cdot \\ \cdot \\ y(-1) \end{bmatrix}, \quad O_f = \begin{bmatrix} C_f \\ C_f A \\ \cdot \\ \cdot \\ C_f A^{N-1} \end{bmatrix}_{N \times N}, \quad O = \begin{bmatrix} C \\ C A \\ \cdot \\ \cdot \\ C A^{N-1} \end{bmatrix}_{N \times N}$$

**טענה:** הקשר בין תנאי ההתחלה הסטנדרטיים לתנאי התחלה על וקטור משתני המצב שהגדרנו

$$\underline{x}(0) = O_f O^{-1} \underline{y}_I \quad (\text{בהנחה ש } O \text{ לא סינגולרי}).$$

הוכחה: סט תנאי ההתחלה הנחוץ לפתרון הבעיה המוצגת במרחב המצב, הינו סט תנאי ההתחלה

$$\underline{x}(0) = [y_f(-N) \quad \dots \quad y_f(-1)]^T$$

של משוואת העזר, הנתון ע"י  $\underline{y}_I$  תנאי ההתחלה ל  $\underline{x}(0)$ .

עבור אינדקסים שליליים  $f(n)=0$ , לכן לפי (5.60):

$$\left. \begin{array}{l} y_f(-N) = C_f \underline{x}(-N) \\ y_f(-N+1) = C_f \underline{x}(-N+1) = C_f A \underline{x}(-N) \\ \cdot \\ \cdot \\ y_f(-1) = C_f A^{N-1} \underline{x}(-N) \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{x}(0) = \begin{bmatrix} C_f \\ C_f A \\ \cdot \\ \cdot \\ C_f A^{N-1} \end{bmatrix} \underline{x}(-N) = O_f \underline{x}(-N)$$

נבצע תהליך דומה על הצגת המצב עבור (5.58) שצורתה (5.56) עם המטריצות (5.63)

$$\left. \begin{array}{l} y(-N) = C \underline{x}(-N) \\ y(-N+1) = C \underline{x}(-N+1) = C A \underline{x}(-N) \\ \cdot \\ \cdot \\ y(-1) = C A^{N-1} \underline{x}(-N) \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{y}_I = \begin{bmatrix} C \\ C A \\ \cdot \\ \cdot \\ C A^{N-1} \end{bmatrix} \underline{x}(-N) = O \underline{x}(-N)$$

אותו וקטור  $\underline{x}(-N)$  מופיע בשתי המשוואות. חילוצו נותן את הקשר  $\underline{x}(0) = O_f O^{-1} \underline{y}_I$ .

לסיכום, הראנו שלמשוואת ההפרשים (5.58) מתאימה הצגת מצב (5.56) עם המטריצות ותנאי ההתחלה

$$(5.64) \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & & 0 & 1 & \\ -a_N & -a_{N-1} & \dots & & -a_1 & \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$C = [-b_0 a_N + b_N, -b_0 a_{N-1} + b_{N-1}, \dots, -b_0 a_0 + b_1], \quad d = b_0$$

$$\underline{x}(0) = O_f O^{-1} \underline{y}_I$$

היכן שב  $C$  יש להציב  $b_k = 0, k \geq L$  ותנאי ההתחלה מובאים באמצעות ביטויים שהוגדרו ב (5.63).

**דוגמא 5.16:** מצא הצגת מצב במשתני פאזה למשוואת ההפרשים שבדוגמא 5.2.:

$$y(n) - \frac{1}{4} y(n-1) - \frac{1}{8} y(n-2) = 3u(n) + \frac{1}{16} u(n-1), \quad y(-1) = 1, y(-2) = 0$$

מקבלים את הפתרון הבא

$$\underline{x}(n+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \underline{x}(n) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(n)$$

$$\underline{x}(0) = \begin{bmatrix} -\frac{16}{275} \\ \frac{275}{92} \\ \frac{275}{275} \end{bmatrix}$$

$$y(n) = \begin{bmatrix} \frac{3}{8} & \frac{13}{16} \end{bmatrix} \underline{x}(n) + 3u(n)$$

ע"י הצבת מקדמי המשוואה המתאימים + החישוב הבא



$$C_f = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}, \rightarrow C = 3C_f + \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{16} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{8} & \frac{13}{16} \end{bmatrix} \quad d = b_0 = 3$$

$$O_f = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{32} & \frac{1}{16} \end{bmatrix}, \quad O = \begin{bmatrix} \frac{3}{8} & \frac{13}{16} \\ \frac{13}{128} & \frac{37}{64} \end{bmatrix}, \quad y_I = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \underline{x}(0) = O_f O^{-1} y_I = \begin{bmatrix} -\frac{16}{275} \\ \frac{92}{275} \end{bmatrix}$$

נבדוק את התוצאה ע"י חישוב ערכים ראשוניים :

$$y(0) = C\underline{x}(0) + 3 = \frac{13}{4}, \quad \underline{x}(1) = A\underline{x}(0) + B = \begin{bmatrix} \frac{92}{275} \\ \frac{275}{296} \\ \frac{275}{275} \end{bmatrix}, \quad y(1) = C\underline{x}(1) + 3 = 4,$$

$$\underline{x}(2) = A\underline{x}(1) + B = \begin{bmatrix} \frac{296}{275} \\ \frac{275}{721} \\ \frac{275}{275} \end{bmatrix}, \quad y(2) = C\underline{x}(2) + 3 = \frac{143}{32}$$

איך מוצאים את הפתרון למערכת המתארת ע"י הצגת מצב? כזכור תמיד אפשר לפתור את המערכת הדיסקרטית שלנו באופן רקורסיבי. כזכור, שיטה זו לא עזרה לזהות את הפתרון הסגור למשוואות הפרשים (מסדר שגדול מ-1). כאן לעומת זאת נגיע מהתחלה כזו הרבה יותר רחוק ... (כי מדובר בסט משוואות מסדר ראשון) נפתור את מערכת משוואות המצב. ע"י הצבה ישירה במשוואה (5.41) נקבל:

$$\begin{aligned} \underline{x}(1) &= A\underline{x}(0) + Bu(0) \\ \underline{x}(2) &= A\underline{x}(1) + Bu(1) = A^2 \underline{x}(0) + A \cdot Bu(0) + Bu(1) \end{aligned}$$

וכך הלאה.

ניתן לראות כי באופן כללי נקבל:

$$(5.65) \quad \begin{cases} \underline{x}(n) = A^n \underline{x}(0) + \sum_{i=0}^{n-1} A^{n-i-1} Bu(i) \\ y(n) = CA^n \underline{x}(0) + \sum_{i=0}^{n-1} CA^{n-i-1} B u(i) + d u(n) \end{cases}$$

נגדיר ונסמן **מטריצת מעבר** (מעבר מתנאי התחלה למצב הנוכחי בהנחה של כניסה אפס) ע"י

$$(5.66) \quad \Phi(n) = A^n$$

באמצעותה ניתן לרשום את (5.65)

$$(5.67) \quad \begin{cases} \underline{x}(n) = \Phi(n)\underline{x}(0) + (\Phi(n-1)B) * u(n) \quad \text{או} \quad \underline{x}(n) = \Phi(n)\underline{x}(0) + (\Phi(n)B) * u(n-1) \\ y(n) = C\underline{x}(n) + du(n) \end{cases}$$

בדומה למקרה הרציף, שוב המפתח לפתרון הוא מציאת מטריצת המעבר.

החישוב פשוט במיוחד אם המטריצה  $A$  ניתנת לליכסון (בהמשך נראה שהתנאי מתקיים אמנם לפולינום האופייני יש אפסים שונים זה מזה).

כאשר ל- $A$  יש  $N$  ערכים עצמיים שונים  $\{\lambda_k, k=1, \dots, N\}$  ו- $T$  מטריצה מלכסנת (כזכור העמודות של  $T$  הן הוקטורים העצמיים)

$$(5.68) \quad \Lambda = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_N^n \end{bmatrix} \Rightarrow A^n = T\Lambda^n T^{-1} = T \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_N^n \end{bmatrix} T^{-1}$$

לא נראה את ההכללה לעייע עם ריבוי (כיסוי גם למצבים כאלה ינתן עי"י שיטת הפתרון באמצעות התמרת  $Z$ ).

**דוגמא 5.17:** מצא את  $y(n)$  למערכת דיסקרטית המתארת עי"י הצגת המצב

$$\begin{aligned} \underline{x}(n+1) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \underline{x}(n) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(n) \\ y(n) &= \begin{bmatrix} 3 & 13 \\ 8 & 16 \end{bmatrix} \underline{x}(n) + 3u(n) \end{aligned} \quad \underline{x}(0) = \begin{bmatrix} -\frac{16}{275} \\ \frac{92}{275} \end{bmatrix}$$

נמצא עייע של  $A$

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -\frac{1}{8} & \lambda - \frac{1}{4} \end{vmatrix} = \lambda^2 - \frac{1}{4}\lambda - \frac{1}{8} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{1}{2}, \lambda_2 = -\frac{1}{4}$$

נמצא להם וקטורים עצמיים

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ t_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ t_1 \end{bmatrix} \Rightarrow t_1 = \frac{1}{2}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ t_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ t_2 \end{bmatrix} \Rightarrow t_2 = -\frac{1}{4}$$

לכן

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \Rightarrow T^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$$

(לחילופין ראוי לדעת ש  $T$  לעייע שונים היא מטריצת הונדרמונדה של העייע). לכן

$$\Phi(n) = A^n = T \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{4}\right)^n \end{bmatrix} T^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2\left(-\frac{1}{4}\right)^n & 4\left(\frac{1}{2}\right)^n - 4\left(-\frac{1}{4}\right)^n \\ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\right)^n & 2\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(-\frac{1}{4}\right)^n \end{bmatrix}$$

נסמן ב

$$\begin{aligned} \underline{x}_u(n) &:= \Phi(n-1)b * u(n) = \Phi(n)b * u(n-1) = \frac{1}{3} \sum_{i=0}^{n-1} \begin{bmatrix} 4\left(\frac{1}{2}\right)^i - 4\left(-\frac{1}{4}\right)^i \\ 2\left(\frac{1}{2}\right)^i + \left(-\frac{1}{4}\right)^i \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 4\left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}}\right) - 4\left(\frac{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^n}{1 + \frac{1}{4}}\right) \\ 2\left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}}\right) + \left(\frac{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^n}{1 + \frac{1}{4}}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{8}{5} - \frac{8}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{16}{15}\left(-\frac{1}{4}\right)^n \\ \frac{8}{5} - \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{4}{15}\left(-\frac{1}{4}\right)^n \end{bmatrix} \\ \underline{x}(n) &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2\left(-\frac{1}{4}\right)^n & 4\left(\frac{1}{2}\right)^n - 4\left(-\frac{1}{4}\right)^n \\ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\right)^n & 2\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(-\frac{1}{4}\right)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{16}{275} \\ \frac{92}{275} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{8}{5} - \frac{8}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{16}{15}\left(-\frac{1}{4}\right)^n \\ \frac{8}{5} - \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{4}{15}\left(-\frac{1}{4}\right)^n \end{bmatrix} \\ \underline{x}(n) &= \begin{bmatrix} \frac{8}{5} - \frac{56}{25}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{32}{55}\left(-\frac{1}{4}\right)^n \\ \frac{8}{5} - \frac{28}{25}\left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{8}{55}\left(-\frac{1}{4}\right)^n \end{bmatrix} \\ y(n) &= \begin{bmatrix} \frac{3}{8} & \frac{13}{16} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{8}{5} - \frac{56}{25}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{32}{55}\left(-\frac{1}{4}\right)^n \\ \frac{8}{5} - \frac{28}{25}\left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{8}{55}\left(-\frac{1}{4}\right)^n \end{bmatrix} + 3 = \left\{ \frac{49}{10} - \frac{7}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{10}\left(-\frac{1}{4}\right)^n \right\} \delta_{-1}(n) \end{aligned}$$

לשים לב שבדוגמה זו לקחנו את הצגת המצב שמצאנו בדוגמה 5.16: עבור דוגמה 5.2: ואמנם קבלנו אותו  $y(n)$ .

**דוגמה 5.18:** בדוגמה זו מוצאים את  $\Phi(n)$  ע"י כך שמניחים שאיברי המטריצה הם נעלמים שיש למצא ולפתור משוואות עבורם. שלא כמו שיטת הליכסון זו דרך לא שיטתית המוגבלת לסדר נמוך. יש למצא את הפתרון להצגת המצב הבאה:

$$\begin{aligned} \underline{x}(n+1) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \underline{x}(n) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(n) \quad ; \quad \underline{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad u(n) = \delta_{-1}(n) \\ y(n) &= [1 \quad 0] \underline{x}(n) \end{aligned}$$

יש למצא ביטוי ל-  $y(n)$

$$\underline{x}(n) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \sum_{i=0}^{n-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{n-i-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(i)$$

$$y(n) = [1 \quad 0] \underline{x}(n) = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \sum_{i=0}^{n-1} [1 \quad 0] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{n-i-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(i)$$

נסמן :

$$A^n = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} a_{11}(n) & a_{12}(n) \\ a_{21}(n) & a_{22}(n) \end{bmatrix}$$

לאחר פתוח אלגברי אלמנטרי :

$$y(n) = [a_{11}(n) + a_{12}(n)] + \sum_{i=0}^{n-1} a_{12}(n-i-1)u(i) = [a_{11}(n) + a_{12}(n)] + \sum_{i=0}^{n-1} a_{12}(n-i-1)$$

או :

$$y(k) = [a_{11}(k) + a_{12}(k)] + \sum_{m=0}^{k-1} a_{12}(m)$$

עלינו למצוא את  $a_{11}(n)$ ,  $a_{12}(n)$  לצורך המשך הפתרון.

$$\begin{bmatrix} a_{11}(n+1) & a_{12}(n+1) \\ a_{21}(n+1) & a_{22}(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{n+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}(n) & a_{12}(n) \\ a_{21}(n) & a_{22}(n) \end{bmatrix}$$

עתה, עבור  $a_{11}(n)$ ,  $a_{12}(n)$  נקבל :

$$\begin{cases} a_{11}(n+1) = a_{21}(n) \\ a_{21}(n+1) = a_{11}(n) + a_{21}(n) \\ a_{12}(n+1) = a_{22}(n) \end{cases}$$

או :

$$\begin{aligned} a_{21}(n+2) &= a_{11}(n+1) + a_{21}(n+1) = a_{21}(n) + a_{21}(n+1) \\ a_{21}(n+2) - a_{21}(n+1) - a_{21}(n) &= 0 \end{aligned}$$

זו משוואת הפרשים מסדר שני. נרשום תנאי התחלה :

$$A^0 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow a_{21}(0) = 0$$

$$A^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow a_{21}(1) = 1$$

(שים לב : הסדרה  $a_{21}(n)$  היא סדרת מספרי פיבונצ'י :  $0 \quad 1 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 5 \quad 8 \quad 13 \quad 21 \dots$ ).

נפתור את המשוואה (שהיא משוואה הומוגנית).

המשוואה האופיינית היא :

$$z^2 - z - 1 = 0$$

ושורשיה :

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}; \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

הפתרון הוא :

$$a_{21}(n) = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n$$

נמצא את A, B מתנאי ההתחלה :

$$0 = a_{21}(0) = A + B \Rightarrow B = -A$$

$$1 = a_{21}(1) = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - A\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = A\sqrt{5} \Rightarrow A = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow B = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

עתה,

$$\begin{aligned} a_{21}(n) &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n = \\ &= 0.4472 \cdot (1.618)^n - 0.4472 \cdot (-0.618)^n \end{aligned}$$

ו :

$$\begin{aligned} a_{11}(k) &= a_{21}(k-1) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} = \\ &= 0.2764 \cdot (1.618)^k + 0.7236 \cdot (-0.618)^k \end{aligned}$$

קל להיווכח שהפיתוח עבור  $a_{12}(n)$  נותן אותה תוצאה כמו עבור  $a_{21}(n)$  :

$$a_{12}(k) = 0.4472 \cdot (1.618)^k - 0.4472 \cdot (-0.618)^k$$

את  $\sum_{m=0}^{k-1} a_{12}(m)$  נחשב לפי פיתוח הטור :

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{n-1} a_{12}(m) &= \frac{0.4472 \cdot (1-1.618^n)}{1-1.618} - \frac{0.4472 \cdot (1-(-0.618)^n)}{1+0.618} \\ &= 0.7236 \cdot 1.618^n + 0.2764(-0.618)^n - 1 \end{aligned}$$

ובסה"כ :

$$\begin{aligned} y(n) &= [a_{11}(n) + a_{12}(n)] + \sum_{m=0}^{n-1} a_{12}(m) = \\ &= 1.4472 \cdot (1.618)^n + 0.5528 \cdot (-0.618)^n - 1 \end{aligned}$$

5.4.1. פתרון משוואות המצב באמצעות התמרת Z.

נבצע התמרת Z של המשוואה (5.56) :

$$z\underline{X}(z) - z\underline{x}(0) = A\underline{X}(z) + B\underline{U}(z)$$

$$[zI - A]\underline{X}(z) = B\underline{U}(z) + z\underline{x}(0)$$

היכן ש  $I$  מטריצת היחידה.

לכן

$$(5.69) \quad \underline{X}(z) = [zI - A]^{-1} z \underline{x}(0) + [zI - A]^{-1} BU(z)$$

$$(5.70) \quad Y(z) = CX(z) + dU(z)$$

נציב את (5.69) ל (5.70) ונקבל:

$$(5.71) \quad Y(z) = C z [zI - A]^{-1} \underline{x}(0) + [C(zI - A)^{-1} B + d]U(z)$$

מהשוואה עם הפתרון במישור הזמן (5.67) רואים ש

$$(5.72) \quad \Phi(z) = Z\{\Phi(n)\} = z[zI - A]^{-1}$$

לכן אפשר גם לכתב

$$(5.73) \quad \begin{cases} \underline{X}(z) = \Phi(z)\underline{x}(0) + \frac{\Phi(z)BU(z)}{z} \\ Y(z) = C\Phi(z)\underline{x}(0) + C\frac{\Phi(z)BU(z)}{z} + dU(z) \end{cases}$$

כמו כן מזהים את פונקציית התמסורת  $H(z)$  המוגדרת כיחס בין  $Y(z)$  לבין  $U(z)$  כאשר  $\underline{x}(0)=0$ ,

$$(5.74) \quad H(z) = C[zI - A]^{-1} B + d = \frac{C\Phi(z)B}{z} + d$$

שבאמצעותה אפשר לכתב גם

$$(5.75) \quad Y(z) = C\Phi(z)\underline{x}(0) + H(z)U(z)$$

לבסוף מוצאים את הפתרונות  $\underline{x}(n)$  ו  $y(n)$  ע"י היפוך של  $\underline{X}(z)$  ו  $Y(z)$ .

**דוגמא 5.19:** אפשר לחזור על פתרון לדוגמא 5.13: ע"י התמרת  $Z$  או להשתמש בהתמרה כדי לקבל חלקים ממנו.

עבור  $A, B, C, d, \underline{x}(0)$  הנתונים בדוגמא 5.13:

(1) נמצא את  $\Phi(n)$  דרך  $\Phi(z)$ .

(2) נמצא את  $\underline{x}_u(n) = Z^{-1}\{H(z)U(z)\}$ .

$$\frac{\Phi(z)}{z} = (zI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} z & -1 \\ -\frac{1}{8} & z - \frac{1}{4} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z + \frac{1}{4}\right)} \begin{bmatrix} z - \frac{1}{4} & 1 \\ \frac{1}{8} & z \end{bmatrix}$$

נפרק לשברים חלקיים כ"א מאברי המטריצה

$$\frac{\Phi(z)}{z} = \left[ \begin{array}{cc} \frac{1/3}{\left(z - \frac{1}{2}\right)} + \frac{2/3}{\left(z + \frac{1}{4}\right)} & \frac{4/3}{\left(z - \frac{1}{2}\right)} - \frac{4/3}{\left(z + \frac{1}{4}\right)} \\ \frac{1/6}{\left(z - \frac{1}{2}\right)} - \frac{1/6}{\left(z + \frac{1}{4}\right)} & \frac{2/3}{\left(z - \frac{1}{2}\right)} + \frac{1/3}{\left(z + \frac{1}{4}\right)} \end{array} \right]$$

נכפול ב  $z$  את שני האגפים ונזהה מהטבלה טרנספורמים הפוכים :

$$\Phi(n) = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2\left(-\frac{1}{4}\right)^n & 4\left(\frac{1}{2}\right)^n - 4\left(-\frac{1}{4}\right)^n \\ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\right)^n & 2\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(-\frac{1}{4}\right)^n \end{bmatrix}$$

(2)

$$\underline{X}_u(z) = \frac{\Phi(z)}{z} BU(z) = \frac{\Phi(z)}{z} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{z}{z-1} = \frac{z}{\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z + \frac{1}{4}\right)(z-1)} \begin{bmatrix} 1 \\ z \end{bmatrix}$$

$$\frac{\underline{X}_u(z)}{z} = \begin{bmatrix} \frac{-8/3}{\left(z - \frac{1}{2}\right)} + \frac{16/15}{\left(z + \frac{1}{4}\right)} + \frac{8/5}{z-1} \\ \frac{-4/3}{\left(z - \frac{1}{2}\right)} + \frac{-4/15}{\left(z + \frac{1}{4}\right)} + \frac{8/5}{z-1} \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{x}_u(n) = \begin{bmatrix} \frac{8}{5} - \frac{8}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{16}{15}\left(-\frac{1}{4}\right)^n \\ \frac{8}{5} - \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{4}{15}\left(-\frac{1}{4}\right)^n \end{bmatrix} \delta_{-1}(n)$$

כעת אפשר להשלים (ולקבל כמקודם) את

$$\underline{x}(n) = \Phi(n)\underline{x}(0) + \underline{x}_u(n)$$

$$y(n) = C\underline{x}(n) + du(n)$$

הערה: נשים לב שאנו מצוידים בכלים מספיקים כדי לפתור את הבעיה גם כאשר ל  $A$  יש ע"ע עם כפילויות זאת מכיוון שהכרנו את הפרוק לשברים חלקיים גם כשיש ריבוי.

#### 5.4.2. הצגת מצב דיסקרטית כתוצאה מדגימה של הצגת מצב רציפה

נתונה לנו מערכת (לא דיסקרטית) מסוימת, המיוצגת ע"י מערכת משתני המצב הבאה:

$$(5.76) \quad \begin{cases} \dot{\underline{x}}(t) = A\underline{x}(t) + Bu(t) \\ y(t) = C\underline{x}(t) + du(t) \end{cases}$$

אנו דוגמים את המערכת ברווחי זמן  $T$ , ומעוניינים לחקור את המערכת הדיסקרטית שמתקבלת.

ערכי  $u(t)$  ידועים לנו רק עבור  $t = nT$ . לכן נניח:

$$(5.77) \quad u(t, nT \leq t < (n+1)T) = u(nT)$$

זהו תהליך של שחזור.

הפתרון הכללי של מערכת משוואות המצב (5.76) הוא:

$$(5.78) \quad \underline{x}(t) = e^{At} \underline{x}(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau$$

נתייחס ל-  $t = nT$  כאל רגע ההתחלה:



$$(5.79) \quad \underline{x}((n+1)T) = e^{A[(n+1)T-nT]} \underline{x}(nT) + \int_{nT}^{(n+1)T} e^{-A[(n+1)T-\tau]} \underline{B}u(\tau) d\tau$$

בהתייחסות למשוואה (5.77) נקבל:

$$(5.80) \quad \underline{x}((n+1)T) = e^{AT} \underline{x}(nT) + \int_{nT}^{(n+1)T} e^{A[(n+1)T-\tau]} \underline{B}u(nT) d\tau$$

נסמן  $u(n) = u(nT), \underline{x}(n) = \underline{x}(nT)$

$$(5.81) \quad \underline{x}(n+1) = e^{AT} \underline{x}(n) + \int_{nT}^{(n+1)T} e^{A[(n+1)T-\tau]} d\tau \underline{B} u(n)$$

זוהי משוואת מצב דיסקרטית מהצורה (5.56).

נציב  $t = nT$  במשוואה (5.76):

$$(5.82) \quad y(nT) = C x(nT) + d u(nT)$$

נסמן  $y(n) = y(nT)$

$$(5.83) \quad y(n) = C \underline{x}(n) + d u(n)$$

משוואה זו היא משוואה מהצורה (5.56).

נסכם: נתקבלה מערכת משוואות מצב הדיסקרטיות:

$$\underline{x}(n+1) = \tilde{A} \underline{x}(n) + \tilde{B} u(n)$$

(5.84)

$$y(n) = \tilde{C} \underline{x}(n) + \tilde{d} u(n)$$

כאשר:

$$(5.85) \quad \begin{cases} \tilde{A} = e^{AT} \\ \tilde{B} = \left[ \int_{nT}^{(n+1)T} e^{A[(n+1)T-\tau]} d\tau \right] \underline{B} \\ \tilde{C} = C \\ \tilde{d} = d \end{cases}$$

**דוגמא 5.20:** מערכת מתוארת ע"י משוואות המצב הבאות:

$$\dot{x}(t) = 2x(t) + 3u(t)$$

$$y(t) = x(t) + 4u(t)$$

במקרה זה  $A = 2; B = 3; C = 1; d = 4$ .

דוגמים את המערכת ברווחי זמן של  $T = 1 \text{ sec}$ . הנח שקיים  $u(t, nT \leq t < (n+1)T) = u(nT)$  ומצא את משוואות המצב של המערכת הדיסקרטית המתקבלת.

$$\tilde{A} = e^{AT} = e^2$$

$$\tilde{B} = \left[ \int_{nT}^{(n+1)T} e^{A[(n+1)T-\tau]} d\tau \right] B = 3 \cdot e^{2(n+1)} \int_n^{n+1} e^{-2t} dt = 3e^{2(n+1)} \frac{e^{-2(n+1)} - e^{-2n}}{-2} = \frac{3}{2}(e^2 - 1)$$

$$\tilde{C} = C = 1$$

$$\tilde{d} = d = 4$$

נרשום את משוואות המצב הדיסקרטיות שנתקבלו:

$$x(n+1) = e^2 x(n) + \frac{3}{2}(e^2 - 1)u(n)$$

$$y(n) = x(n) + 4u(n)$$

## 6. מבחני יציבות למערכות לינאריות

כפי שלמדנו, היציבות של מערכת לינארית רציפה מובטחת אם כל הקטבים של פונקצית התמסורת שלה נמצאים בחצי המישור המרוכב השמאלי. כמו כן למדנו שהיציבות של מערכת לינארית בדידה מובטחת אם כל הקטבים של פונקצית התמסורת שלה נמצאים בתוך מעגל יחידה סביב הראשית של המישור המרוכב. בפרק זה נביא מבחני יציבות שבודקים תנאים אלה באופן אלגברי (דהינו במספר מצומצם של פעולות על מקדמי הפולינום בלא חישוב נומרי של אפסי הפולינום).

### 6.1 קריטריון Routh למערכות רציפות

נאמר על פולינום

$$(6.1) \quad F_n(s) = f_0 + f_1s + \dots + f_n s^n = f_n \prod_{i=1}^n (s - s_i)$$

כי הוא יציב (במובן של פולינום אופייני של מערכת רציפה) אם  $\text{Re}\{s_i\} < 0$  לכל  $i = 1, \dots, n$ . במקרים כלליים יותר מעוניינים לדעת את פילוג  $n$  האפסים של  $F(s)$ . נסמן:

- $\alpha$  מספר האפסים ב (Left Half Plane) LHP (דהינו  $F_n(s)$  יציב אם  $\alpha = n$ )
- $\beta$  מספר האפסים על הציר הדמיוני (Imaginary Axis)
- $\gamma$  מספר האפסים ב (Right Half Plane) RHP

כך ש  $\alpha + \beta + \gamma = n$  הקריטריון מאפשר לקבוע את היציבות ( $\alpha = n$ ) ובהרחבה, שתתואר חלקית, גם את הפילוג  $(\alpha, \beta, \gamma)$ , על ידי מספר סופי של פעולות בלא לחשב את האפסים.

#### אלגוריתם:

נבנה ל  $F_n(s)$  סדרה של פולינומים זוגיים  $R_k(s)$ ,  $k = n, n-1, \dots, 0$

היכן ש  $R_k(-s) = R_k(s)$  (ז"א מקדמי חזקות אי זוגיות מתאפסים) והחזקה המקסימלית שלו היא  $2m$  עבור  $k=2m+1, k=2m$  (ז"א חזקה מקסימלית  $k$  ל  $k$  זוגי ו-  $k-1$  ל  $k$  אי-זוגי) באופן הבא:

#### אתחול:

$$(6.2) \quad R_n(s) = \frac{1}{2} [F_n(s) + F_n(-s)] = f_0 + f_2 s^2 + \dots + f_{2m} s^{2m} \quad \leftarrow \begin{matrix} n=2m \\ \text{or} \\ n=2m+1 \end{matrix}$$

$$R_{n-1}(s) = \frac{1}{2s} [F_n(s) - F_n(-s)] = f_1 + f_3 s^2 + \dots + f_{2m-1} s^{2m-2} (+ f_{2m+1} s^{2m})$$

רקורסיה: עבור  $k = n-1, \dots, 1$  מצא  $R_{k-1}(s)$

$$\rho_{k+1} = \frac{R_{k+1}(0)}{R_k(0)} \quad (6.3)$$

$$R_{k+1}(s) = \rho_{k+1}R_k(s) + s^2R_{k-1}(s) \quad (\Rightarrow R_{k-1}(s))$$

האלגוריתם נקרא נורמלי אם  $R_k(0) \neq 0$  עבור כל  $k$ . אחרת הוא יקרא לא נורמלי.

משפט: אם  $F_n(s)$  מתגלה כלא נורמלי  $\Leftarrow F_n(s)$  לא יציב. אחרת האלגוריתם מוגדר היטב עד

לסימו. נסמן ע"י

$$(6.4) \quad \nu = \text{Var}\{R_n(0), R_{n-1}(0), \dots, R_0(0)\}$$

את מספר חילופי הסימן של הסדרה ב  $s = 0$ . תנאי הכרחי ומספיק ליציבות הוא  $\nu = 0$ .

(תנאי הכרחי ומספיק אקויוולנטי הוא  $\gamma_k > 0 \quad k = n, \dots, 1$ ).

הרחבה: אם האלגוריתם נורמלי אז  $\beta = 0$  (אין אפסים על הציר הדמיוני),  $\alpha = n - \nu$ ,  $\gamma = \nu$

הערה: מבחן *Routh* מופיע בספרי הלימוד בד"כ באופן מעט שונה. האלימינציה נעשית למקדם החזקה הגבוהה ביותר (במקום של האיבר החופשי בני"ל) ובטבלה מופיעים מקדמי הפולינומים בסדר יורד (במקום בסדר עולה בני"ל). נדרש גם הגדרה שונה של זוג הפולינומים באתחול עם הבחנה בין המקרה של פולינום מדרגה זוגית ואי זוגית. ס"ה אפשר להראות שהאלטרנטיבה שבספרים אלה אקויוולנטית לביצוע האלגוריתם דלעיל לפולינום עם היפוך סדר מקדמים (דהינו ל-  $F_n^\#(s)$  על פי הגדרת סימון שתובא ב(6.6) למטה). יש לשים לב של-  $F_n(s)$  ו-  $F_n^\#(s)$  יש אותו פילוג אפסים ביחס לציר הדמיוני (למה?). אפשר להשתמש בעובדה האחרונה כדי להפעיל את המבחן הנ"ל ל  $F_n^\#(s)$  אם זה נראה "פשוט" יותר.

אופן הטיפול במקרים הלא נורמליים לא ידון כאן. הצעות טיפול למצבים אלה מופיעות במאמרים שונים בספרות ראה למשל [2]. נדגיש רק את האפיונים הבאים של המקרים הלא נורמליים:

- הופעת חלוקה באפס מעידה על אי-יציבות.

- הופעת פולינום  $R_{k-1}(s) \equiv 0, k \geq 1$  קורת אם ורק אם האפסים של  $R_k(s)$  הם אפסים של

$F_n(s)$ . לפולינום זוגי יש אפסים שהם או על הציר הדמיוני או שהם מופיעים בזוגות עם שיקוף

ביחס לציר הדמיוני. לכן התופעה  $R_{k-1}(s) \equiv 0, k \geq 1$  מהווה תנאי הכרחי (אך לא מספיק) לקיום אפסים על הציר הדמיוני.

(ולכן סיום נורמלי של האלגוריתם מבטיח שאין אפסים דמיוניים).

**דוגמא 6.1:** נחקור את הפולינום  $F(s) = 1 + 5s + 9s^2 + 5s^3$  בעזרת המבחן הנ"ל.

$$R_3(s) = \frac{1}{2} \left\{ \underbrace{1 + 5s + 9s^2 + 5s^3}_{F(s)} + \underbrace{(1 - 5s + 9s^2 - 5s^3)}_{F(-s)} \right\} = 1 + 9s^2$$

$$R_2(s) = \frac{1}{2s} \left\{ \underbrace{1 + 5s + 9s^2 + 5s^3}_{F(s)} - \underbrace{(1 - 5s + 9s^2 - 5s^3)}_{F(-s)} \right\} = 5 + 5s^2$$

$$\gamma_3 = \frac{R_3(0)}{R_2(0)} = \frac{1}{5} \Rightarrow 1 + 9s^2 = \frac{1}{5}(5 + 5s^2) + s^2 R_1(s)$$

$$R_1(s) = 8$$

$$\gamma_2 = \frac{R_2(0)}{R_1(0)} = \frac{5}{8} \Rightarrow 5 + 5s^2 = \frac{5}{8}(8) + s^2 R_0(s)$$

$$R_0 = 5$$

נבדוק מספר חילופי הסימן של הסדרה ב  $s = 0$

$$Var\{R_3(0), R_2(0), R_1(0), R_0(0)\} = Var\{1, 5, 8, 5\} = 0 \Rightarrow \text{יציב}$$

מקובל לרשום את האלגוריתם בטבלה שבה דרגות פולינומים יורדות משורה לשורה ובכל שורה מופיעים מקדמי הפולינום של הסדרה בסדר חזקות עולה (ואפשר לנסח את הרקורסיה כתבנית של פעולות בין אברי השורות). למשל לדוגמה הנ"ל הטבלה תהיה

	$s^0$	$s^2$
$R_3$	1	9
$R_2$	5	5
$R_1$	8	
$R_0$	5	

יוצא ש (6.2) מתאר את חילופי הסימן לאורך העמודה הראשונה.

**דוגמא 6.2:** לאילו ערכים של  $K$  הפולינום  $P(s) = K + 5s + 9s^2 + 5s^3$  יציב? כמה אפסים "לא

יציבים" יש לו עבור  $K=10$ ?

נחזור על האלגוריתם ונקבל את הטבלה

	$s^0$	$s^2$
$R_3$	$K$	9
$R_2$	5	5
$R_1$	$9 - K$	
$R_0$	5	

יציב אם ורק אם אין חילופי סימן בעמודה הראשונה  $\Leftrightarrow 0 < K < 9$ . עבור  $K=10$  יש 2 חילופי סימן לכן יש 2 אפסים ב RHP ו 1 ב LHP (ר' ההרחבה). (ל  $K = 9$  מקבלים  $R_1(s) \equiv 0$  במצב כזה נובע ככלל שהאפסים של הפולינום שלפניו הם גם אפסים של הפולינום הנבחן; כאן  $R_2(s) = 5(1+s^2)$  ולכן ל  $P(s)$  יש 2 אפסים על הציר הדמיוני ב  $\pm j$ ; ב  $K=0$  יש אפס ב  $s=0$  ואלו דוגמאות למצבים שעבורם לא הבאנו הרחבה של השיטה לשם כך ראה [2] למשל)

## 6.2. קריטריון Bistritz למערכות בדידות

נאמר על פולינום

$$(6.5) \quad D_n(z) = d_0 + d_1z + \dots + d_nz^n = d_n \prod_{i=1}^n (z - z_i)$$

כי הוא יציב (במובן של פולינום אופייני של מערכת דיסקרטית) אם  $|z_i| < 1$   $i = 1, \dots, n$ .

במקרים כלליים יותר מעוניינים בפילוג  $n$  האפסים של  $D_n(z)$ . נסמן:

- $\alpha$  מספר האפסים בתוך מעגל היחידה (Inside Unit Circle) IUC ( $D_n(z)$  יציב אם

$$(\alpha = n$$

- $\beta$  מספר האפסים על מעגל יחידה UC (Unit Circle).

- $\gamma$  מספר האפסים מחוץ למעגל היחידה OUC (Outside Unit Circle)

$$\text{כך ש } \alpha + \beta + \gamma = n.$$

הקריטריון מאפשר לקבוע את היציבות ( $\alpha = n$ ) ובהרחבה, שתואר חלקית, גם את הפילוג

( $\alpha, \beta, \gamma$ ) על ידי מספר סופי של פעולות בלא לחשב את האפסים.

### אלגוריתם:

ראשית יש לבדוק האם  $D_n(1) = \sum_{i=0}^n d_i = 0$ . אם כן אז לפולינום יש אפס על מעגל היחידה ולכן

כבר ברור שאינו יציב. [ניתן, אם רוצים להמשיך ולמצא את פילוג האפסים שלו ביחס למעגל

היחידה, לחלץ את הפקטור  $(z-1)$  ואח"כ להמשיך כדלקמן]. נסמן

$$(6.6) \quad D_n^\#(z) = z^n D_n(z^{-1}) = d_n + d_1z + \dots + d_0z^n$$

ל  $D_n(z)$  ( $D_n(1) \neq 0$ ) נבנה סדרה של פולינומים  $T_k(z)$   $k = n, n-1, \dots, 0$  כך שלכל  $k$ ,

הוא פולינום סימטרי,  $T_k(z) = T_k^\#(z)$ , מדרגה  $k$

$$. (T_k(z) = t_{k,0} + t_{k,1}z + \dots + t_{k,1}z^{k-1} + t_{k,0}z^k$$

### אתחול:

$$T_n(z) = D_n(z) + D_n^\#(z)$$

$$(6.7) \quad T_{n-1}(z) = \frac{D_n(z) - D_n^\#(z)}{z-1}$$

רקורסיה: עבור  $k = n-1, n-2, \dots, 1$  מצא את  $T_{k-1}(z)$

$$(6.8) \quad \delta_{k+1} = \frac{T_{k+1}(0)}{T_k(0)}$$

$$zT_{k-1}(z) = \delta_{k+1}(z+1)T_k(z) - T_{k+1}(z)$$

נאמר שהאלגוריתם נורמלי אם כל ה  $T_k(0) \neq 0$ , אחרת הוא יקרא לא נורמלי.

משפט: אם האלגוריתם מתגלה כלא נורמלי, אזי  $D_n(z)$  לא יציב.

אחרת ניתן להמשיך את האלגוריתם עד לסיומו ואז נסמן ב  $v$

$$(6.9) \quad v = \text{var}\{T_n(1), T_{n-1}(1), \dots, T_0(1)\}$$

את מספר חילופי הסימן של הסדרה ב  $z = 1$ .

תנאי הכרחי ומספיק ליציבות הוא  $v = 0$ . (התנאי  $\delta_k > 0$  עבור  $k = n, \dots, 1$  הכרחי ליציבות אך אין הוא תנאי מספיק ליציבות).

הרחבה: אם האלגוריתם נורמלי אז  $\beta = 0$  (אין אפסים על מעגל היחידה),  $\gamma = v$  ו  $\alpha = n - v$ .

הכללות מופיעות ב[3] וב [4] (ב [4] מובא פישוט משמעותי לטיפול במקרה הלא נורמלי).

נציין להלן שני אפיונים חשובים למקרים הלא נורמליים:

- הופעת חלוקה באפס מעידה על אי-יציבות.

- הופעת פולינום  $T_{k-1}(z) \equiv 0, k \geq 0$  קורה אם ורק אם האפסים של  $T_k(z)$  הם אפסים של

$D_n(z)$ . אפסים של פולינום סימטרי חייבים להיות או אפסי UC או זוגות אפסים עם שיקוף

ז"א  $T_{k-1}(z) \equiv 0, k \geq 1$  קורה אם ורק אם לפולינום הנבחן יש אפסים על מעגל היחידה או זוגות

עם שיקוף ביחס למעגל היחידה  $\rho e^{j\theta}, \frac{1}{\rho} e^{-j\theta}$  <= התופעה  $T_{k-1}(z) \equiv 0, k \geq 1$  היא תנאי הכרחי

(אך לא מספיק) לקיום אפסים על הציר הדמיוני (לכן במיוחד אם האלגוריתם מסתיים באופן

"נורמלי" מובטח שאין אפסי UC).

**דוגמא 6.3:** נבדוק האם הפולינום  $D(z) = 2 + z - 22z^2 + 24z^3$  יציב.

נבדוק ש  $D(1) \neq 0$  ו-  $D^\#(z) = 24 - 22z + z^2 + 2z^3$  לכן

$$T_3(z) = \underbrace{2 + z - 22z^2 + 24z^3}_{D(z)} + \underbrace{(24 - 22z + z^2 + 2z^3)}_{D^\#(z)} = 26 - 21z - 21z^2 + 26z^3$$

$$\underbrace{2 + z - 22z^2 + 24z^3}_{D(z)} - \underbrace{(24 - 22z + z^2 + 2z^3)}_{D^\#(z)} = -22 + 23z - 23z^2 + 22z^3 = (z-1)T_2(z) \Rightarrow$$

$$T_2(z) = 22 - z + 22z^2$$

$$\delta_3 = \frac{T_3(0)}{T_2(0)} = \frac{26}{22} \Rightarrow 26 - 21z - 21z^2 + 26z^3 = \frac{13}{11}(z+1)(22 - z + 22z^2) - zT_1(z)$$

$$T_1(z) = \frac{504}{11} + \frac{504}{11}z$$

$$\delta_2 = \frac{T_2(0)}{T_1(0)} = \frac{121}{252} \Rightarrow 22 - z + 22z^2 = \frac{121}{252}(z+1)\left(\frac{504}{11} + \frac{504}{11}z\right) - zT_0(z)$$

$$T_0(z) = 45$$

נמצא את  $\nu = \text{var}\{T_3(1), T_2(1), T_1(1), T_0(1)\} = \text{var}\{10, 43, \frac{1008}{11}, 45\} = 0$  (6.7) לכן הפולינום

יציב.

גם כאן ניתן לסדר את האלגוריתם בטבלה. להקל על ניסוח הרקורסיה כתבנית של פעולות בין אברי השורות רצוי לסדר אותה כפירמידה. הסידור לדוגמה הנ"ל הינו

				$T_k(1)$
26	-21	-21	26	10
	22	-1	22	43
		504/11	504/11	1008/11
			45	45

**דוגמא 6.4:** לאילו ערכים של  $K$  הפולינום  $D(z) = 2 + Kz - 22z^2 + 24z^3$  יציב?

נחזור על האלגוריתם ונקבל את הטבלה

				$T_k(1)$
26	$K - 22$	$K - 22$	26	$8 + 2K$
	22	$-K$	22	$44 - K$
		$\frac{24}{11}(22 - K)$	$\frac{24}{11}(22 - K)$	$\frac{48}{11}(22 - K)$
			$44 + K$	$44 + K$

האפשרות שכל סכומי השורות שליליים לא מתאפשרת לאף ערך של  $K$ .



האפשרות שכולם חיוביים נותנת את תחום היציבות  $-4 < K < 22$ .  
 נבדוק למשל מה קורה במקרה  $K=22$ . מקבלים  $T_1(z) \equiv 0$  לכן (כמו במקרה Routh למצב כזה) זה אומר שהפולינום הקודם הינו בעל אפסים שהם גם אפסים של הפולינום הנבחן. ואמנם האפסים של  $T_2(z) \equiv 22(1-z+z^2)$  (שהם על מעגל היחידה) הם חלק מהאפסים של  $D(z)_{|K=22} = 2 + 22z - 22z^2 + 24z^3$  למעשה  $D(z)_{|K=22} = T_2(z)(1+12z)/11$  (הרחבה שיטתית איך להמשיך במקרים לא נורמליים כאלה ראה ב [4]).  
 ומה למשל פילוג האפסים כאשר  $K = 33$  ?  
 $\nu = \text{var}\{74,77,-48,45,11\} = 2$  לפי ההרחבה למשפט יש 2 אפסים OUC ו 1 IUC.

מקורות (לפרק 6):

- [1] E. Routh, *A treatise on the stability of a given motion*, London, MacMillan 1877.
- [2] D. Pal and T. K. Kailath "Displacement structure approach to singular distribution problems: The imaginary axis case" IEEE Trans. on Circuits and Systems - part I, vol. 41, pp. 138-148, 1994.
- [3] Y. Bistritz, "Zero location with respect to the unit circle of discrete-time linear system polynomials", Proceedings of the IEEE Vol. 72, September 1984, pp. 1131-1142.
- [4] Y. Bistritz, "Zero location of polynomials with respect to the unit-circle unhampered by nonessential singularities", IEEE Trans. on Circuits and Systems - part I, vol. 49, pp. 305-314, March 2002.



## תרגילים

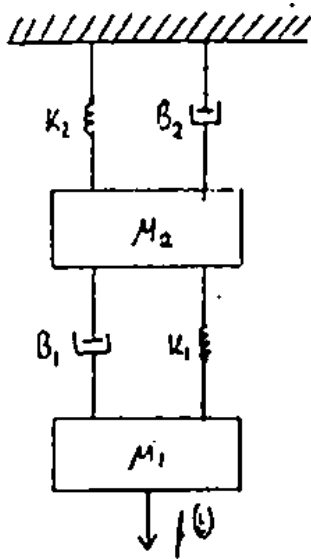
### פרק 1.

1.1 עבור המערכת המתוארת בציור מצא :

א. הדיאגרמה האקויוולנטית המתארת את המערכת.

ב. מהירות המסות במצב מתמיד (Steady-state) כאשר  $f(t)$  קבוע.

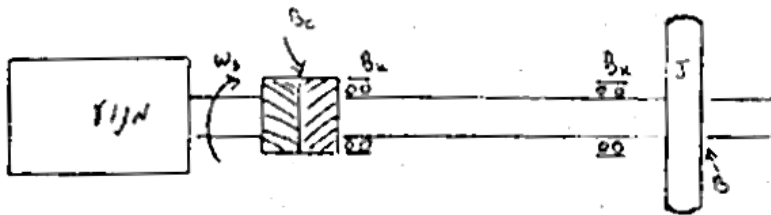
(הדרכה: למציאת הדיאגרמה האקויוולנטית קבע ראשית את הצמתים שהם מהירויות הייחוס ואחר כך חבר ביניהם את הרכיבים המתאימים)



1.2 מנוע סינכרוני (מקור מהירות סיבוב קבועה  $\omega_s$ ) מפעיל לגלגל תנופה (מומנט אנרציה  $J$  ק"ג - מ')

באמצעות תמסורת הכוללת: מצמד (מקדם חיכוך  $B_c$  נ-מ' שני/רדיאן) וציר תמסורת בעל מקדם פיתול  $K$ , הנתמך בקצותיו באמצעות שני מיסביסבעלי מקדמי חיכוך  $B_K$ . החיכוך בין ציר התמסורת לגלגל תנופה הוא  $B$ .

א. קבל דיאגרמה אקויוולנטית עבור המערכת (באותה שיטה בה השתמשת בשאלה הקודמת).  
 ב. קבל מד"ר המקשרת בין מהירות המנוע למהירות לגלגל התנופה.



1.3 קבל ביטויים עבור מקדם הקשיחות האקויוולנטי של שני קפיצים המחוברים א בטור, ב במקביל.

1.4 בתא המרכזי של צרוף בין שלשה תאים מותקן רדיאטור המספק  $q$  וואט. קבול החום של כל אחד מהתאים הוא  $C$  ג'אול/בק"ג מעלה, ומוליכות החום של כל אחד מהתאים היא  $K$  וואט מעלה. טמפרטורת התא החיצון  $T_o$ .

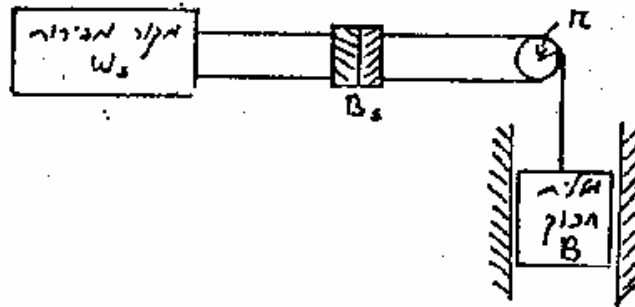
קבל דיאגרמה אקויוולנטית עבור המערכת, וחשב את טמפרטורת התא המרכזי במצב המתמיד.

1.5 מקור מהירות זוויתית  $\omega_s$ , מחובר דרך מצמד עם קבוע ריסון  $B_s$  ולמוט פיתול עם קבוע פיתול  $K$ , מוט הפיתול מחובר חיבור קשיח לגלגילה ללא אנרציה בעלת רדיוס  $r$ . לגלגילה מחובר חבל, הקשור למעלית בעלת מסה  $M$  ובעלת חיכוך  $B$  עם הקירות. יש להתחשב בכוח הכובד הפועל על המעלית.

א. קבל דיאגרמה אקוויולנטית עבור המערכת.

ב. שקף את המעגל אל הכניסה.

ג. מה היא המשוואה הדיפרנציאלית המקשרת בין מקור המהירות למהירות המעלית?

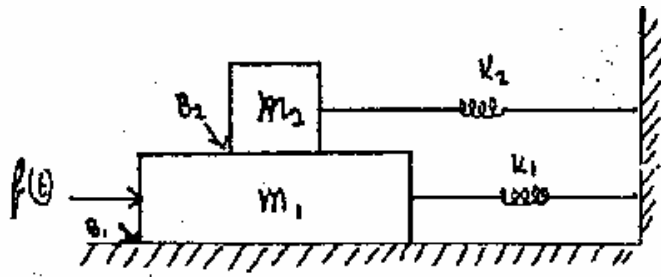


1.6 עבור המערכת המתוארת בצירור:

א. קבל דיאגרמה אקוויולנטית.

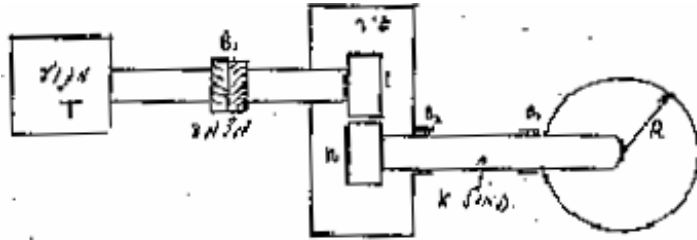
ב. קבל משוואה דיפרנציאלית המקשרת בין הכוח המופעל  $f(t)$  למהירות המסה הקטנה  $M_2$ .

ג. מה יקרה במצב מתמיד (כאשר מכניסים  $f(t)$  קבוע)?



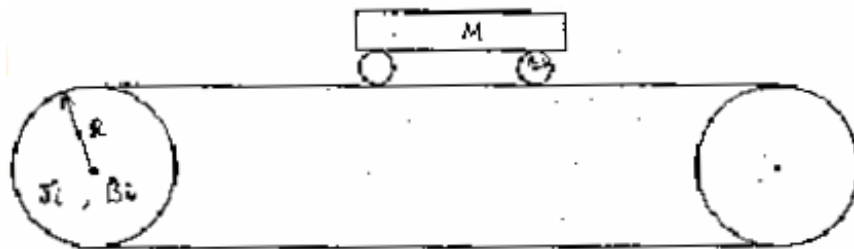
1.7 נתאר מכוננית כמודל פשוט, לפיו מנוע - שהוא מקור מומנט  $T$  מעביר את המומנט דרך מצמד, שניתן לתארו כמרסן  $B_1$ , אל הגיר שיחס התמסורת שלו  $1:n$ , התמסורת מהגיר מתבצעת על ידי מוט, שמעביר את המומנט אל הגלגלים האחוריים, שהם בעלי רדיוס  $R$ , למוט מקדם פיתול  $K$  והחיכוך במיסביו הוא  $B_2$  ליד הגיר ו-  $B_3$  ליד הגלגלים. מסת המכוננית היא  $M$  והחיכוך בין הצמיגים לכביש הוא  $B_4$ .

- א. מצא את הדיאגרמה החשמלית האקויוולנטית של המערכת.  
 ב. רשום משוואה דיפרנציאלית המקשרת את מומנט המנוע למהירות המכוננית.



1.8 הציור הבא מתאר כלי רכב הנע על גבי רצועה הכרוכה סביב שתי גלגילות שציריהן קבועים. מסת הכלי  $M$ . מנוע הרכב ניתן לייצוג על ידי מקור מומנט  $T_s$  בעל חיכוך פנימי  $B_s$  ואנרציה  $J_s$  (הכוללת את גלגלי הרכב שרדיוסם  $r$ ).

מקדם החיכוך הקווי בין הגלגלים לבין הרצועה הוא  $B$ . מומנט האינרציה של כל אחת מהגלגליות הוא  $J_i$ . מקדם החיכוך במיסבי הגלגליות הוא  $B_i$  ורדיוסו  $R$ .

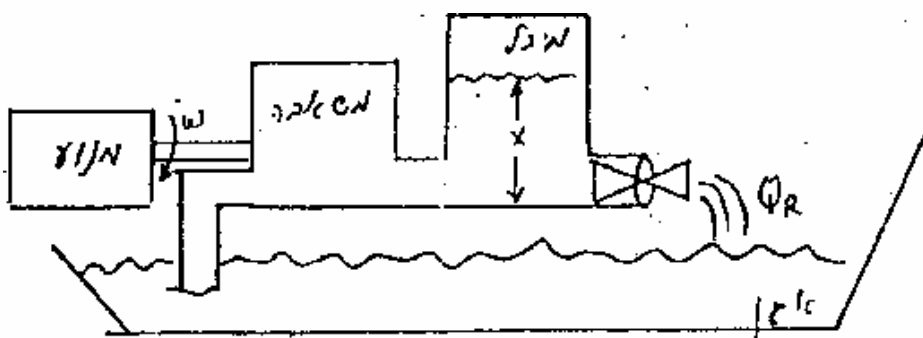


- א. קבל דיאגרמה אקויוולנטית עבור המערכת.  
 ב. מה תהיה מהירות הרכב כתגובה לעירור כאשר אין חיכוך בין גלגלי הרכב לבין הרצועה ( $B=0$ )?  
 ג. כדי לקבל תמונה נאמנה יותר למציאות, עלינו להתחשב במקדם מתיחה של הרצועה ובמסתה. קבל כעת את הדיאגרמה. (רמז: ניתן לראות את הרצועה כשרשרת של אינסוף מסות קטנות המחוברות בניהן על ידי קפיצים).

משאבה המופעלת על ידי מנוע חשמלי מזרימה מים מאגן למיכל מים, ממנו נפלטים המים חזרה לאגן. המנוע הוא מנוע ז"י מבוקר ע"י מתח העוגן. התנגדות העוגן היא R, השראותו L (זניחה), ומקדם התמרה אלקטרו מכני K. מומנט האנרציה של הרוטור הוא Jn ומקדם החיכוך במיסב ציר הרוטור Bn.

המשאבה: מומנט אנרציה של החלק המסתובב Jp, מקדם חיכוך המיסב Bp ומקדם פרופורציה  $\alpha$  הקובע את הקשר  $Q = \alpha \omega$ , בין הספיקה דרך המשאבה ומהירות הסיבוב  $\omega$ . המנוע מחובר למשאבה באמצעות ציר קשיח לחלוטין.

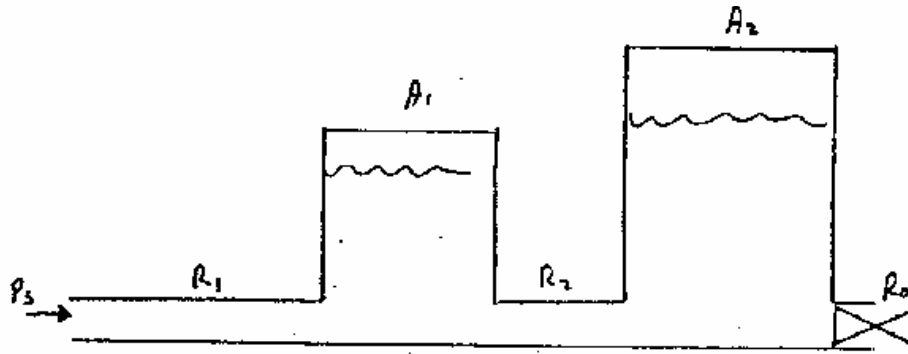
המיכל: שטח חתך A, התנגדות הידראולית של ברז היציאה היא RH, צפיפות המים  $\rho$  הלחץ שמפתחת המשאבה הוא הלחץ ההידרוסטטי  $\rho g x$  בכניסה למיכל (כאשר X=גובה פני המים



במיכל). הלחץ בכניסה למשאבה וביציאה מהמיכל הוא אפס.

- שרטט דיאגרמה אקויוולנטית למערכת.
- שקף את המעגל שקבלת לכניסה.
- קבל משוואה דיפרנציאלית שתקשר את מהירות המנוע לספיקת המים ביציאה מהמיכל.
- מה יקרה אם נתן מתח קבוע למנוע ונסגור את ברז היציאה כך ש  $RH \rightarrow \infty$ ?

1.10 משאבה המזרימה מים בלחץ קבוע  $P_s$  מחוברת לצינור בעל התנגדות הידראולית  $R_1$ . הצינור מוביל את המים למיכל אשר שטחו  $A_1$ . למיכל זה מתחבר צינור נוסף, בעל התנגדות הידראולית  $R_2$  המוליך למיכל שני בעל שטח  $A_2$ . ממיכל זה מוזרמים המים החוצה דרך ברז, אשר התנגדותו ההידראולית הוא  $R_0$ . הלחץ החיצוני הוא אפס.



- מצא דיאגרמה אקויוולנטית.
- רשום משוואה דיפרנציאלית למערכת.
- מצא את ספיקת המים החוצה במצב העמיד.

## פרק 2.

2.1 מערכת מתוארת על ידי המשוואה הדיפרנציאלית:  $\ddot{y} + 7\dot{y} + 10y = u(t)$

ידוע כי בזמן  $t = 0^-$ ;  $y = 3 - t = \sigma$  הערור:  $u(t) = \delta_{-1}(t)$

- קבל את התגובה לתנאי ההתחלה.
- קבל את התגובה במצב העמיד.
- קבל את התגובה החולפת.
- קבל את התגובה לעירור.
- קבל את התגובה הכללית (לעירור ותנאי התחלה).
- האם הפתרון במקרה זה היה שונה אילו נתנו אותם תנאי התחלה עבור  $t = 0^+$ ?
- חשב את תגובת המערכת לאימפולס בתנאי התחלה אפס.
- חזור על הפתרון בעזרת התמרת לפס.

2.2 מערכת מתוארת על ידי המשוואה הדיפרנציאלית:  $\ddot{y} + 7\dot{y} + 10y = u + \dot{u}$

- קבל את  $y(t)$  עבור  $t > 0$  כאשר  $u(t) = \delta_{-1}(t)$  וכן נתון כי בזמן  $t = 0^-$ ;  $y = 0$ ;
- מהם ערכי  $y$  ו- $\dot{y}$  כאשר  $t = 0^+$ ?

2.3 מצא את הקונבולוציה של הזוגות הבאים של הפונקציות :

א  $\delta_0(t); \sin at$

ב  $t; e^{at}$

ג  $\sin(at); \cos(bt)$

ד  $e^{at}; e^{bt}$

ה  $(\delta_{-1}(t) - \delta_{-1}(t - \tau)); e^{-at}$

2.4 נתונה המשוואה  $\ddot{y} + 8\dot{y} + 15Y = u + 2\dot{u} + 5\ddot{u}$

א קבל את  $y(t)$  עבור  $t > 0$  כאשר  $u(t) + \delta_{-1}(t)$  וכן נתון כי בזמן  $t=0$   $\dot{y} = -7; y = 3$

ב מהם ערכי  $y$  ו-  $\dot{y}$  כאשר  $t=0+$ ?

2.5 תגובת המדרגה של מערכת היא:  $y_{-1}(t) = \left[ 1 - e^{-t} \left( \cos 5t + \frac{1}{5} \sin 5t \right) \right] \delta_{-1}(t)$

א מהי המשוואה המקשרת בין העירור  $u(t)$  לתגובה  $y(t)$ ?

ב פתור אותה עבור

$u(t) = \delta_0(t - 1); y(0) = 0; \dot{y}(0) = 1$

$u(t) = \cos t; y(0) = 0; \dot{y}(0) = 1$

2.6 מצא את התמרת לפלס ההפוכה של כל אחת מהפונקציות הבאות :

א  $\frac{e^{-s}}{5+s}$  ב  $\frac{5}{5(s+2)(s+3)^2}$  ג  $\frac{1}{s^2 - 2s + 1}$

ד  $\frac{1}{s^2(s^2 + 1)}$  ה  $\frac{1}{s^3 + a^3}$  ו  $\frac{s^2}{(s^2 - a^2)^2}$

ז  $\frac{s^2}{(s^2 + a^3)^2}$  ח  $\frac{1 - e^{-5}}{s}$



2.7 נתונה מערכת המתוארת על ידי המשוואה:  $a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = u(t)$

הבעיה היא למצוא את התגובה של מערכת זו ל-  $u(t) = \delta_0(t)$

כאשר תנאי ההתחלה הם אפס.

א. העבר את הבעיה של מציאת התגובה להלם של מערכת זו (שהיא, בעצם, התגובה לדובלט -

$\delta_1(t)$  של המערכת  $a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = u(t)$  לבעיית תנאי התחלה.

$$a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = \delta_1(t)$$

כלומר, מהם  $\alpha$  ו-  $\delta$  שעבורם  $y(t)$ , שהוא פתרון המשוואה

$$y(0) = \dot{y}(0) = 0$$

$$a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = 0$$

שווה ל-  $y(t)$  שהוא פתרון המשוואה

$$y(0) = \alpha; \dot{y}(0) = \beta$$

ב. פתור את המשוואה  $\ddot{y} + 5\dot{y} + 4y = \dot{u} + 2u$  עבור  $u(t) = \delta_0(t)$  עם תנאי התחלה  $y(0) = -1; \dot{y}(0) = 1$

2.8 השתמש אך ורק במשפטי הערך הסופי וההתחלתי כדי לקבוע לכל פונקציה זמן מהטור הימני את

התמרת לפלס שלה מתוך הפונקציות בטור השמאלי.

$$\frac{2\beta(s + \alpha)}{[(s + \alpha)^2 + \beta^2]^2}$$

$$\frac{(s + \alpha)(s^2 + \alpha^2) + s^2\alpha^2}{\alpha^2 s^2 (s^2 + \alpha^2)}$$

$$\frac{e^{-\alpha s}}{s + \alpha} - \frac{e^{-\beta s}}{s}$$

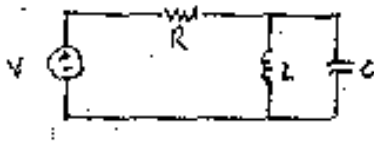
$$e^{-\alpha t} \delta_{-1}(t - \alpha) - \delta_{-1}(t - \delta)$$

$$\frac{\alpha t + \sin \alpha t + 1}{\alpha^2}$$

$$te^{-\alpha t} \sin \delta t$$

**פרק 3.**

**3.1** א מצא הצגת משתני מצב פיזיקלית עבור המעגל החשמלי:



ב עבור אותו מעגל - מצא את המשוואה הדיפי' המקשרת את מתח הכניסה לזרם בסליל, וכעת רשום הצגת משתני מצב מתוך המשוואה הדיפי'.

**3.2** נתונה המערכת:

$$x = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 0]x$$

מצא את המשוואה הדיפרנציאלית המתארת את המערכת.

**3.3** נתונה המשוואה:  $y^{(3)} + 6y^{(2)} + 4y^{(1)} + 6y = 2u$

מצא הצגת משתני מצב קנונית אלכסונית ואת תנאי ההתחלה ( $\underline{x}(0)$ )

**3.4** קבל הצגת משתני מצב עבור המשוואה שנידונה בתרגיל 2.1 ופתור בעזרתה את החלקים השונים של התרגיל, תוך השוואת התוצאות.

**3.5** מצא הצגת משתני מצב פיזיקלית עבור המערכת המתוארת בתרגיל 1.6.

**3.6** מצא הצגת משתני מצב שתתאר את מהירות המכונית כפונקציה של מומנט המנוע בתרגיל 1.7

**3.7** את פתרון המשוואה  $\dot{\underline{x}} = \underline{A}\underline{x}$  עבור תנאי ההתחלה  $\underline{X}(0)$  ניתן להביע בצורה  $\underline{X}(t) = e^{\underline{A}t}$ .

נתונה על ידי  $e^{\underline{A}t} = \underline{E}e^{\underline{\Lambda}t}\underline{E}^{-1}$  כשבביטוי זה -  $\underline{\Lambda}t$  היא מטריצה אלכסונית שאבריה הם הערכים העצמיים של  $\underline{A}$  -1  $\underline{E}$  היא מטריצה שעמודותיה הם וקטורים עצמיים (לא דווקא מנורמלים) של  $\underline{A}$ .

הוכח כי את הפתרון הנ"ל ניתן לבטא גם כך:  $\underline{X}(t) = \underline{E}_0 e^{\underline{\lambda}t}$  כשכאן -  $e^{\underline{\lambda}t}$  היא מטריצת עמודה שרכיביה הם  $e^{\lambda_{ub}}$  ו  $\underline{E}_0$  היא המטריצה של וקטורים עצמיים משוקללים באופן מיוחד:

$\underline{\alpha} = \underline{E}\underline{X}_0$  כאשר  $\underline{\alpha} = \underline{E}\underline{\alpha}$  היא מטריצה אלכסונית, והאלמנטים בה הם רכיבי הוקטור  $\underline{\alpha} = \underline{E}\underline{X}_0$

ישם את התוצאות הנ"ל עבור המקרה:  $\underline{X}_0 = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \end{bmatrix}$   $\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

3.8 עבור המערכת שבתרגיל 1.10 -

$$Q_0(0) = 3/2$$

$$Q^1(0) = 1$$

קבל את הצגת משתני המצב הפיזיקלית ופתור אותה עבור תנאי התחלה:

$$A_1 = \rho g$$

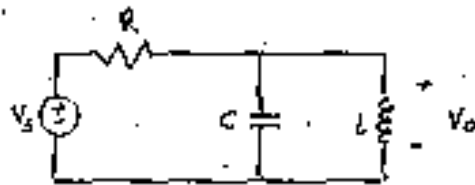
$$A_2 = 2\rho g$$

$$R_0 = R_1 = i \quad \text{נתוני המערכת:}$$

$$R_2 = 2$$

3.9 תאר את המשוואה  $\ddot{y} + 7\dot{y} + 12y = 2u + 3\dot{u}$  באמצעות דיאגרמת מלבנים.

3.10 שרטט דיאגרמת מלבנים עבור המעגל הבא:



3.11 מצא דיאגרמת מלבנים עבור מערכת משתני המצב הבאה:  $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -8 & -6 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$

צמצם את הדיאגרמה לקבלת פונקציית התמסורת  $y = [32]x$

3.12 תאר את המשוואה  $\ddot{y} + 4\dot{y} + 5y = 2u + \dot{u}$  באמצעות תרשים זרימה, וקבל את פונקציית התמסורת.

3.13 ערוך דיאגרמת מלבנים ותרשים זרימה שיתארו את זרימת החום מהרדיאטור משאלה 1.4. קבל את פונקציית התמסורת מן הדיאגרמה ומתוך תרשים הזרימה.

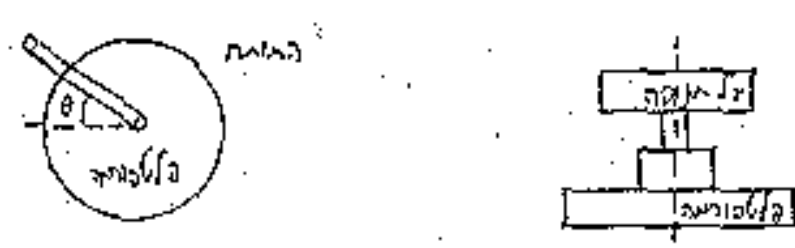
3.14 גופו של מנוע (מקור מומנט  $T_s$ ) מורכב על פלטפורמה (מומנט אינרציה  $T_p$ ) צפה וצירו מתלכד עם ציר הפלטפורמה. הציר קשוח לחלוטין ומורכב עליו גל תנופה (מומנט אירציה  $J$ ) ומקדם החיכוך במיסבו  $B$ . כאשר המנוע מופעל מסתובב גל התנופה במהירות  $\omega_0$  וכן נגרם סיבוב הפלטפורמה סביב צירה ב-  $\omega_p$  כאשר היא צפה בנוזל עם חיכוך  $B_p$ .

ערוך תרשים זרימה עבור המערכת וקבל פונקציית תמסורת המקשרת בין מומנט המנוע ומהירות הסיבוב של הפלטפורמה.

3.15 ערוך דיאגרמת מלבנים שתתאר את מודל המכוננית שבתרגיל 1.7 חשב מתוכה את פונקצית התמסורת.

3.16 ערוך תרשים זרימה עבור המשוואה שבתרגיל 3.9 וקבל את פונקצית התמסורת מתוך דיאגרמת המלבנים ותרשים הזרימה.

3.17 מערכת תותח כוללת את התותח עצמו ופלטפורמה עליו הוא מורכב. על מנת לסובב את הפלטפורמה סביב צירה מפעילים גל תנופה בעזרת מנוע חשמלי בזרם ישר המבוקר על ידי מתח העוגן. מומנט האינרציה של הפלטפורמה כולל התותח הוא  $J_p$  ושל גל התנופה  $J_B$ . מתח העוגן  $V$  התנגדות סליל העוגן  $R$  והשראותו  $L$ . מקדם ההתמרה האלקטרומכני הוא  $K$ , ומקדם החיכוך של מיסב המנוע הוא  $B$ .  
 א. קבל סכימת תמורה עבור המערכת התאפשר חישוב מהירות הסיבוב  $\omega_p$  של הפלטפורמה.  
 ב. קבל דיאגרמת מלבנים שבאמצעותה ניתן לחשב את פונקצית התמסורת בין מתח העוגן ושנוי הזווית  $Q$  של התותח.  
 ג. קבל את פונקצית התמסורת הנ"ל בהזנחת השראות העוגן.  
 ד. ערוך תרשים זרימה עבור המערכת, וודא כי מתקבלת אותה פונקצית תמסורת (בהזנחת  $L$ ).

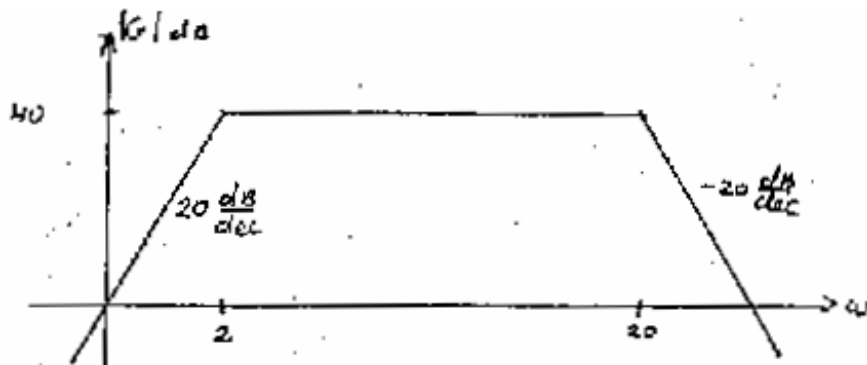


פרק 4.

4.1 שרטט עקומות בודה (אמפליטודה ופאזה) עבור מערכת שפונקצית התמסורת שלה היא:

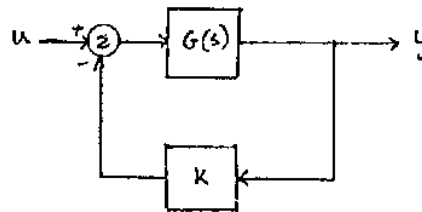
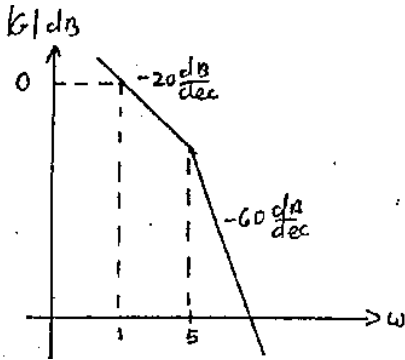
$$G(S) = \frac{10(1 + S/5)}{(1 + S/10)(1 + S/20)}$$

4.2 הציור מראה דיאגרמת בודה אסימטוטית לאמפליטודה, עבור מערכת מסויימת בפאזה מינימלית:

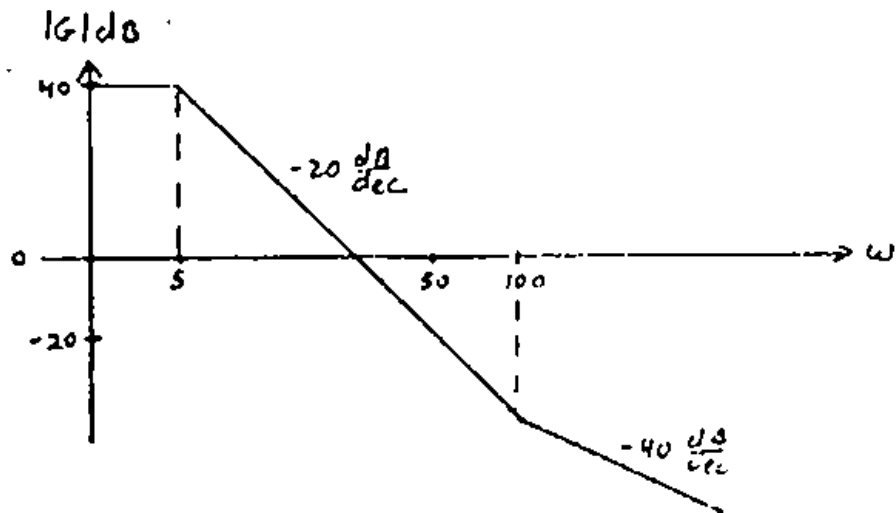


קבל את פונקצית התמסורת.

- 4.3 הציור מראה דיאגרמת בודה אסימפטוטית עבור שיעור ההגבר של מערכת מסויימת בפאזה מינימלית. בתדירות הברך, הערך המדוייק של הגבר המערכת הוא 6.  
 א. קבל את פונקצית התמסורת.  
 ב. מהו הערך המקסימלי של המשוב  $K$  שעבורו תהיה המערכת בחוג סגור יציבה?



- 4.4 בציור הבא מובאת דיאגרמת בודה לאמפליטודה למערכת מסוימת בפאזה מינימלית.

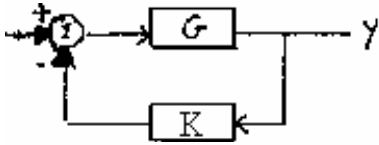


נתון  $\omega = 5, |G(j\omega)|_{dB} = 34dB$ . מצא:

- א. פונקצית תמסורת כאשר נתון כי קבוע ההגבר חיובי.  
 ב. מצא את הערכים ההתחלתיים והסופיים של התגובה להלם.  
 ג. תן תיאור אסימפטוטי של עקום הפאזה.

4.5 את התותח בשאלה 3.17 רוצים לכוון לכיוון זוויתי רצוי  $Q_R$ . לשם כך מוסיפים למערכת בקר המווסת את מתח המנוע כך שיהיה פרופורציוני לסטייה  $Q_R - Q$  בצורה הבאה:

$$V = K_C(Q_R - Q)$$



- א. קבל את דיאגרמת המלבנים עבור המערכת המשופרת.  
 ב. קבל את פונקציית התמסורת.  
 ג. התווה דיאגרמת בודה אסימפטוטית עבור  $G(s)$  לפני הוספת הבקר ואחריו והשווה ביניהן.  
 ד. הוכח כי במצב היציב, במערכת המשופרת התותח אכן ינעל על הכוון הרצוי  $Q_R$ .  
 ה. מהו ערכו המקסימלי של  $K_c$  כך שהמערכת המשופרת עדין תישאר יציבה. קבל זאת בעזרת קריטריון רות (בהתאם לנלמד בפרק 6)

## פרק 5.

5.1 מצא את הפתרונות למשוואות הבאות. הבחן בתגובה לערור ותגובה לתנאי התחלה אלו מן המערכות יציבות?

א.  $y(K+2) + 7y(K+1) + 10y(K) = 2\delta_{-1}(K)$

ב.  $4Y(K+2) - 4y(K+1) + y(K) = 2\delta_{-1}(K)$

ג.  $y(K+2) + 2y(K+1) + y(K) = (1+2K)\delta_{-1}(K)$

תנאי התחלה לנייל:  $y(0) = 1; y(1) = -1$

5.2 מערכת מאופיינת על ידי משוואת ההפרשים הבאה:

$$2y(K+2) - 3y(K+1) + y(K) = 6f(K+2) - 2f(K+1)$$

$$f(K) = \begin{cases} 2^K & 0 < K \leq 2 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

מצא:

א. את פונקציית המתארת הבדידה.

ב. את  $y(k)$  כאשר נתונים תנאי ההתחלה  $y(1) = 1; y(0) = 0$

ג. מהו  $\lim_{k \rightarrow \infty} y(k)$

5.3 מצא התמרת Z של הסדרות הבאות (האיבר הראשון  $K=0$ )

א.  $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots$

ב.  $0, 2, 2 \cdot 2^2, 3 \cdot 2^3, 4 \cdot 2^4, 5 \cdot 2^5, \dots$

ג.  $1, 0, -1, -1, 0, 1, 1, 0, -1, -0, 1, 1, 0, \dots$

5.4 נתונה המערכת בעלת פוני התמסורת הבאה:  $G(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s+3)}$

מצא:

א. הצגת משתני מצב, רציפה.

ב. הצגת משתני מצב בדידה עבור זמן דגימה  $T=1 \text{ sec}$

ג. משוואת הפרש של המערכת הדגימה.

ד. דיאגרמת מלבנים עבור משוואת הפרשים.

ה. תרשים זרימה עבור המערכת.

5.5 מצא פונקציות תמסורת ותגובות להלם של המערכות הבאות:

א.  $y[n] - \frac{1}{12}y[n-1] - \frac{1}{12}y[n-2] = U[n]$

ב.  $y[n] - 7y[n-1] + 10y[n-2] = 2U[n] + 3U[n-5]$

5.6 מצא פיתרון של משוואות הפרשים הנתונות ע"י שימוש בהתמרת Z.

א.  $y[n] - \frac{7}{12}y[n-1] + \frac{1}{12}y[n-2] = 2\delta_{-1}[n]$

$y[-1] = 1, \quad y[-2] = -1$

ב.  $y[n+2] + \frac{1}{4}y[n+1] - \frac{1}{8}y[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n \delta_{-1}[n]$

$y[-1] = 1, \quad y[-2] = 2$

ג.  $y[n] - y[n-1] + \frac{1}{4}y[n-2] = \left(\frac{1}{3}\right)^n \delta_{-1}[n]$

$y[0] = 0, \quad y[2] = 2$

5.7 נתונה המערכת הדיסקרטית הבאה

$$12y(K+2) + y(K+1) - y(K) = u(K+1) + 2u(K)$$

רשום הצגת מערכת במשתני מצב.

5.8 פתור את המשוואות הבאות :

א.  $y(K+2) - 8y(K+1) + 15y(K) = 2^k \delta_{-1}(k)$   
 $y(0) = 1; y(1) = 4$

ב.  $y(K+2) - y(K+1) - 2y(K) = K^2 \delta_{-1}(K)$   
 $y(0) = 2; y(1) = 1$

ג.  $y(K+2) - 3y(K+1) + 2y(K) = 2^k (k-1) \delta_{-1}(k)$   
 $y(0) = 2; y(1) = -3$

ד.  $y(K+2) - 5y(K+1) + 6y(K) = (3K + 2^k) \delta_{-1}(k)$   
 $y(0) = 2/3; y(1) = -4$

5.9 מצא התמרת Z הפוכה לפונקציות הבאות :

א.  $\frac{aZ}{(Z-a)^2}$

ב.  $\frac{(a^2 + b)Z^{-2} - 2(a+b)Z^{-1} + b + 1}{(1 - Z^{-1})^2 (1 - aZ^{-1})^2}$

ג.  $\frac{Z^2}{(Z-a)^3}$

5.10 נתונות המערכות הלינאריות בעלות פונקציות התמסורת הבאות :

$$\frac{s+2}{s^2+4s+3}, \frac{1}{s(s+1)}, \frac{e^{-s}}{s+2}$$

עבור זמן דגימה של  $T=1$  sec קבל

א. הצגת משתני מצב רציפה.

ב. הצגת משתני מצב בדידה עבור כניסת מדריגה ברוחב זמן דגימה.

ג. משוואות ההפרש של המערכת.

ד. דיאגרמת מלבנים ותרשים זרימה לכל מערכת.

5.11 מערכת מתוארת על ידי משוואות ההפרש הבאה :

$$y(k) - \frac{1}{6}y(k-1) - \frac{1}{6}y(k-2) = au(k) + bu(k-1) + u(k-2)$$

א. האם המערכת יציבה?

ב. חשב תגובת המערכת עבור  $u(k) = \delta(k)$

1. כאשר  $a = b = 0$

2. כאשר  $a = 0 : b=1$



3. כאשר  $a = b = 1$

ג. חשב ערך סופי של התגובה לערור  $u(k) = (-1)^k \delta_{-1}(k)$  עבור  $a = b = 1$

**5.12** בנק מציע תכנית חסכון במטבע חוץ. עבור הפקדות חודשיות קבועות למשך 5 שנים נותן הבנק

0.5% ריבית חודשית המצטברת חודשית. נניח שלקוח הצטרף לתכנית והפקיד סכום של \$50 בתחילת כל חודש. רוצים לדעת כמה כסף שה"כ יש לרשותו ארבע שנים מההפקדה הראשונה, ולקראת 20 שנה מההפקדה הראשונה. תייחס לחשבון החסכון כמערכת דיסקרטית שהכניסה היא ההפקדה החודשית והתפוקה הסכום המצטבר בחשבון. א. פתור בעיה זו במישור הזמן בפתרון משוואת הפרשים.

ב. פתור אותה בעיה בעזרת התמרת  $Z$  ומצא גם מהו הסכום שיועבר לצאצאי אותו לקוח לקראת תום 239 שנים מאז הופקד הסכום הראשון.

## פרק 6

**6.1** עבור הפולינומים הבאים, מצא את מספר השורשים שחלקם הממשי (א) שלילי (ב) חיובי (ג) אפס:

א.  $S^5 + 2S^4 + 2S^3 + 46S^3 + 89S + 260 = 0$

ב.  $6S^5 + 3S^4 + 4S^3 + 2S^2 + S + 1 = 0$

ג.  $S^6 + 3S^4 + 3S^3 + 9S^1 - 4S - 12 = 0$

ד.  $S^5 + 6S^4 + 15S^2 + 130S^2 + 44S + 24 = 0$

ה.  $S^4 + 4S^3 - 4S^2 + 4S - 5 = 0$

**6.2** עבור אילו ערכי משוב שלילי  $K$  תהיינה המערכות הבאות יציבות: (בדוק לפי קריטריון רות הורוביץ).

א.  $G(s) = \frac{S+1}{(S+2)(S+3)}$

ב.  $G(s) = \frac{1}{S(S^2+1)}$

ג.  $G(s) = \frac{s}{(s^2+1)(s-5)}$

ד.  $G(s) = \frac{s-1}{s^2(s+2)}$